



义务教育教科书

SHUXUE

数学

九年级 | 上册



北京师范大学出版社

北师大版

义务教育教科书

数学

九年级 | 上册

顾 问：汤 涛

主 编：马 复

副 主 编：章 飞

本册主编：刘晓玫

编写人员：（按姓氏笔画为序排列）

张惠英 张新华 胡耀东

章 巍 程燕云

◆ 北京师范大学出版社

北师大版

出版发行：北京师范大学出版社 <https://www.bnupg.com>

北京市西城区新街口外大街 12-3 号

邮政编码：100088

印刷：保定市中画美凯印刷有限公司

经销：全国新华书店

开本：787 mm × 1092 mm 1/16

印张：11.75

字数：284 千字

版次：2026 年 7 月第 1 版

印次：2026 年 7 月第 1 次印刷

定价：11.00 元

ISBN 978-7-303-31955-8

价格批准文号：京发改规〔2016〕13 号

责任编辑：齐栋超 王永会

美术编辑：王蕊 胡美慧

责任校对：段立超 陈民

责任印制：孙文凯 赵非非

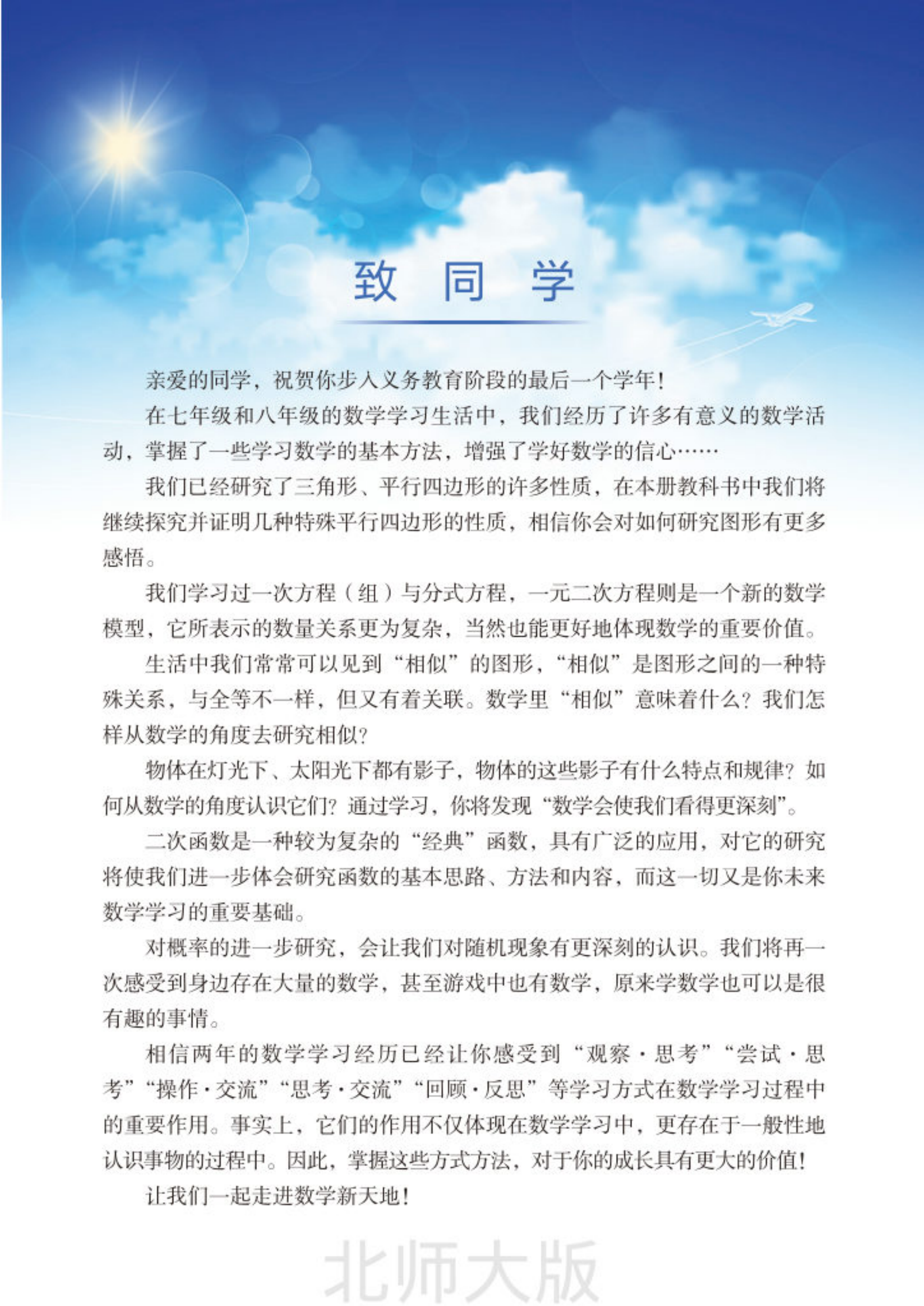
版权所有 侵权必究

读者服务电话：010-58806806

如发现印装质量问题，影响阅读，请联系印制管理部：010-58800825

如发现内容质量问题，请登录教材意见反馈平台 <https://jcyjfk.100875.com.cn>

北师大版



致 同 学

亲爱的同学，祝贺你步入义务教育阶段的最后一个学年！

在七年级和八年级的数学学习生活中，我们经历了许多有意义的数学活动，掌握了一些学习数学的基本方法，增强了学好数学的信心……

我们已经研究了三角形、平行四边形的许多性质，在本册教科书中我们将继续探究并证明几种特殊平行四边形的性质，相信你会对如何研究图形有更多感悟。

我们学习过一次方程（组）与分式方程，一元二次方程则是一个新的数学模型，它所表示的数量关系更为复杂，当然也能更好地体现数学的重要价值。

生活中我们常常可以见到“相似”的图形，“相似”是图形之间的一种特殊关系，与全等不一样，但又有着关联。数学里“相似”意味着什么？我们怎样从数学的角度去研究相似？

物体在灯光下、太阳光下都有影子，物体的这些影子有什么特点和规律？如何从数学的角度认识它们？通过学习，你将发现“数学会使我们看得更深刻”。

二次函数是一种较为复杂的“经典”函数，具有广泛的应用，对它的研究将使我们进一步体会研究函数的基本思路、方法和内容，而这一切又是你未来数学学习的重要基础。

对概率的进一步研究，会让我们对随机现象有更深刻的认识。我们将再一次感受到身边存在大量的数学，甚至游戏中也有数学，原来学数学也可以是很有趣的事情。

相信两年的数学学习经历已经让你感受到“观察·思考”“尝试·思考”“操作·交流”“思考·交流”“回顾·反思”等学习方式在数学学习过程中的重要作用。事实上，它们的作用不仅体现在数学学习中，更存在于一般性地认识事物的过程中。因此，掌握这些方式方法，对于你的成长具有更大的价值！

让我们一起走进数学新天地！

目录

第一章

特殊平行四边形

- 1 认识特殊平行四边形 / 2
- 2 菱形的性质与判定 / 5
- 3 矩形的性质与判定 / 11
- 4 正方形的性质与判定 / 17
- ☆ 问题解决活动：作内嵌于正方形的正八边形 / 24
- 回顾与思考 / 26
- 复习题 / 26



第二章

一元二次方程



- 1 认识一元二次方程 / 31
- 2 一元二次方程的解法 / 37
- 3 一元二次方程的根与系数的关系 / 48
- 4 一元二次方程的应用 / 51
- 回顾与思考 / 55
- 复习题 / 55

第三章

图形的相似

- 1 相似多边形 / 60
- 2 探索三角形相似的条件 / 67
- 3 相似三角形判定定理的证明 / 77
- 4 相似三角形的性质 / 84
- 5 图形的位似 / 90
- ☆ 问题解决活动：利用相似三角形测高 / 96
- 回顾与思考 / 99
- 复习题 / 99



第四章 投影与视图

- 1 投影 / 106
- 2 视图 / 116
- 回顾与思考 / 124
- 复习题 / 124



第五章 二次函数



- 1 认识二次函数 / 129
- 2 二次函数的图象 / 132
- 3 二次函数的应用 / 141
- 4 二次函数与一元二次方程 / 148
- ☆ 问题解决活动：怎样围面积最大 / 155
- 回顾与思考 / 156
- 复习题 / 156

第六章 概率的进一步认识

- 1 用树状图或表格求概率 / 164
- 2 用频率估计概率 / 173
- 回顾与思考 / 176
- 复习题 / 176



综合与实践

- 猜想、证明与拓广 / 179
- 池塘里有多少条鱼 / 180

学习印记

第一章

特殊平行四边形

我们已经认识了四边形“家族”中的特殊成员——平行四边形，那么平行四边形“家族”中有哪些特殊成员呢？你能发现并证明这些特殊成员的性质吗？

我们已经研究了平行四边形的概念、性质、判定和应用，本章将借助研究平行四边形的经验，对菱形、矩形、正方形等特殊平行四边形进行深入研究，探索它们的性质及判定条件，并通过推理论证确认结论的正确性。在此过程中，你将感悟特殊与一般的关系，进一步发展推理能力等。



在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：



- 💡 研究一类图形的“一般”与“特殊”之间的关系对于认识图形有怎样的帮助？
- 💡 如何研究一种图形的性质及判定条件？

1

认识特殊平行四边形

在学习三角形时，我们认识了特殊的三角形——等腰三角形、直角三角形。类似地，在平行四边形“家族”中，也有一些特殊的成员。

图 1-1 中含有平行四边形，观察这些平行四边形，你能发现它们有什么特殊之处吗？

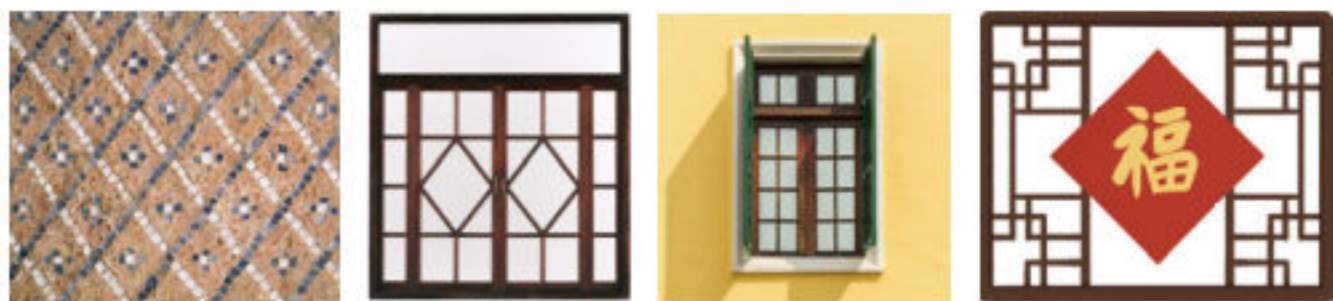


图 1-1

思考·交流

从平行四边形的边或角考虑，你认为可能有哪些特殊的平行四边形？与同伴进行交流。

有一组邻边相等的平行四边形叫作**菱形** (rhombus)；有一个角是直角的平行四边形叫作**矩形** (rectangle)；有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫作**正方形** (square)。如图 1-2，四边形 $ABCD$ 是菱形，四边形 $EFGH$ 是矩形，四边形 $PQRS$ 是正方形。

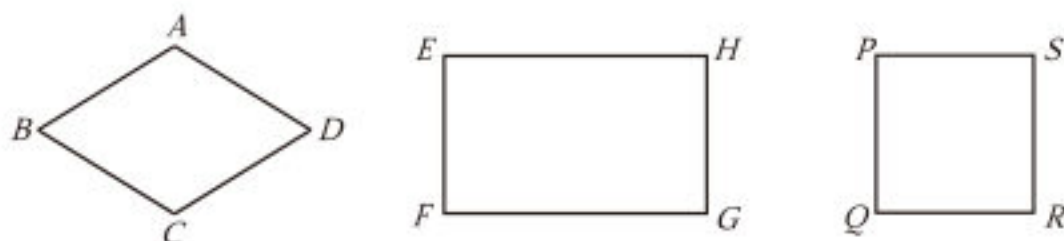


图 1-2

尝试·交流

(1) 菱形、矩形、正方形都是特殊的平行四边形，它们都具有一般平行四边形的所有性质，你能分别列举一些这样的性质吗？与同伴进行交流。

(2) 请你画图表示平行四边形、菱形、矩形、正方形之间的关系，并与同伴分享你画的关系图。

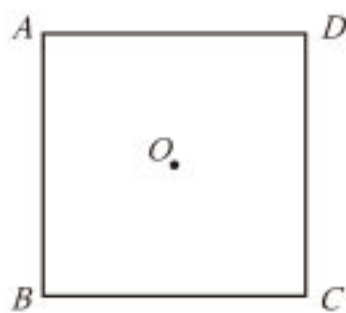
尝试·思考

菱形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？矩形呢？正方形呢？先想一想，再用纸片折一折。

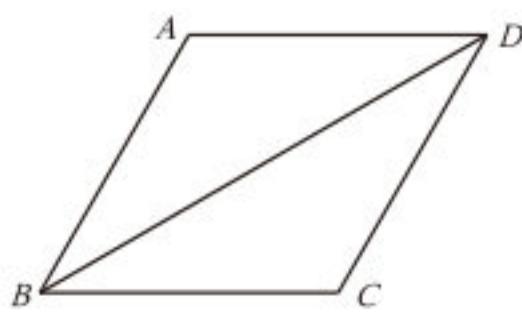
菱形、矩形、正方形都是轴对称图形；菱形、矩形都有两条对称轴，正方形有四条对称轴。

随堂练习

1. 如图，正方形 $ABCD$ 绕着它的对称中心点 O 旋转，旋转多少度后能够与原正方形重合？



(第1题)



(第2题)

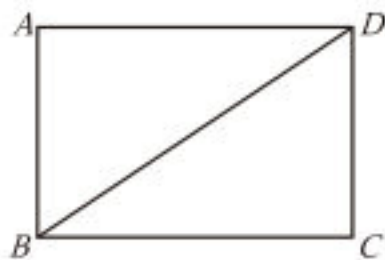
2. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle ABD = 30^\circ$ ，求 $\angle C$ 的度数。



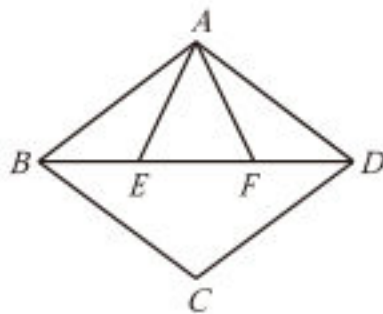
习题1.1

> 知识技能

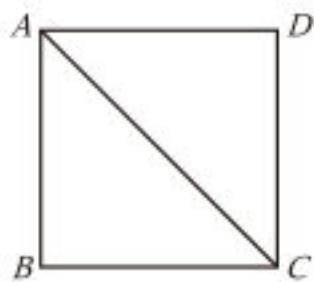
1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $CD = 2$ ，求对角线 BD 的长。



(第1题)



(第2题)



(第3题)

2. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， E, F 为对角线 BD 上的两点，且 $BE = DF$ 。求证： $AE = AF$ 。
3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，对角线 $AC = 2$ ，求 CD 的长。

> 数学理解

4. 如果用两张三角形纸片拼成一个菱形（无缝隙、不重叠），那么这两张三角形纸片应该具备什么特征？如果用两张三角形纸片拼成一个矩形呢？如果用两张三角形纸片拼成一个正方形呢？先想一想，再试一试，并画出示意图。

2

菱形的性质与判定

我们知道菱形具有平行四边形的所有性质。那么，菱形还有哪些特殊性质呢？与同伴进行交流。

可以发现：菱形的四条边相等，对角线互相垂直。请你尝试证明这些结论。

已知：如图 1-3，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O 。

求证：(1) $AB = BC = CD = AD$ ；(2) $AC \perp BD$ 。

证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = CD, AD = BC$ (菱形的对边相等)。

又 $\because AB = AD$,

$\therefore AB = BC = CD = AD$ 。

(2) $\because AB = AD$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形。

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore OB = OD$ (菱形的对角线互相平分)。

在等腰三角形 ABD 中，

$\therefore OB = OD$,

$\therefore AO \perp BD$,

即 $AC \perp BD$ 。

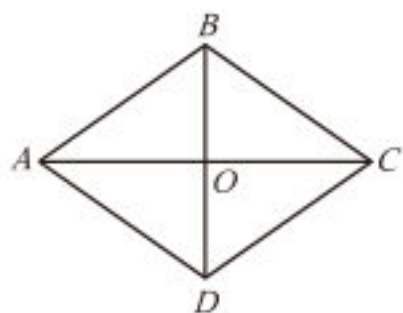


图 1-3

定理 菱形的四条边相等。

定理 菱形的对角线互相垂直。

思考·交流

你是如何发现菱形的特殊性质的？与同伴交流你的经验。

例1 如图1-4，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $BD = 6$ 。

(1) 求 AB 和 AC 的长；

(2) 求菱形 $ABCD$ 的面积。

解：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = AD$ (菱形的四条边相等)，

$AC \perp BD$ (菱形的对角线互相垂直)，

$OB = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ (菱形的对角线互相平分)。

在等腰三角形 ABD 中，

$\because \angle BAD = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形。

$\therefore AB = BD = 6$ 。

在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中，由勾股定理，得

$$OA^2 + OB^2 = AB^2,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore AC = 2OA = 6\sqrt{3} \text{ (菱形的对角线互相平分)}.$$

(2) 菱形 $ABCD$ 的面积

$$= \triangle ABC \text{ 的面积} + \triangle ADC \text{ 的面积}$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot OB + \frac{1}{2}AC \cdot OD$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot (OB + OD)$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$$

$$= 18\sqrt{3}.$$

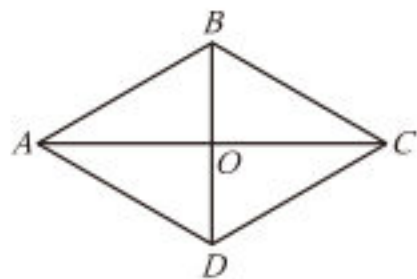
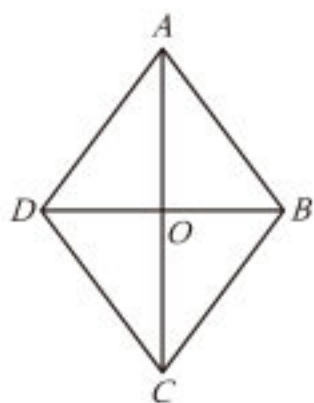


图 1-4

随堂练习

- 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O 。已知 $AB = 5 \text{ cm}$ ， $AO = 4 \text{ cm}$ ，求 BD 的长。
- 菱形 $ABCD$ 的周长为 40 cm ，它的一条对角线长 10 cm 。
 - 求这个菱形每一个内角的度数；
 - 求这个菱形另一条对角线的长。



(第1题)

根据菱形的定义，有一组邻边相等的平行四边形是菱形。除此之外，你认为还有什么条件可以判定一个四边形是菱形？

思考·交流

(1) 由菱形的性质定理可知，如果一个四边形是菱形，那么它的四条边相等。反过来，四条边相等的四边形一定是菱形吗？为什么？与同伴进行交流。

(2) 菱形的对角线具有怎样的性质？写出它的逆命题，这个逆命题成立吗？为什么？与同伴进行交流。

可以发现：四边相等的四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

下面证明第二个结论，第一个结论的证明请你自己完成。

已知：如图 1-5，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AC \perp BD$ 。

求证： $\square ABCD$ 是菱形。

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC$ 。

又 $\because AC \perp BD$ ，

$\therefore$ 直线 BD 是线段 AC 的垂直平分线。

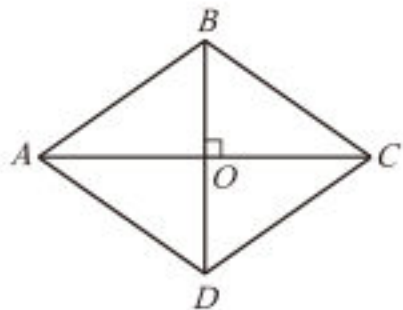


图 1-5

$\therefore BA = BC$ 。
 $\therefore \square ABCD$ 是菱形（菱形的定义）。

定理 四边相等的四边形是菱形。
定理 对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

尝试·交流

- (1) 如图 1-6, 已知线段 a , 请画出菱形 $ABCD$, 使它的对角线 $AC = a$ 。
 (2) 满足 (1) 中条件的菱形唯一吗? 如果不唯一, 那么你认为添加怎样的条件, 就可以使画出的菱形是唯一的? 与同伴进行交流。

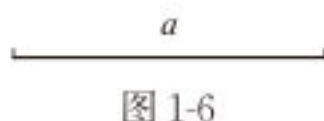


图 1-6

例2 已知: 如图 1-7, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AB = \sqrt{5}$, $OA = 2$, $OB = 1$ 。

求证: $\square ABCD$ 是菱形。

证明: 在 $\triangle AOB$ 中,

$\because AB = \sqrt{5}$, $OA = 2$, $OB = 1$,
 $\therefore AB^2 = OA^2 + OB^2$.
 $\therefore \triangle AOB$ 是直角三角形, $\angle AOB$ 是直角。
 $\therefore AC \perp BD$.
 $\therefore \square ABCD$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）。

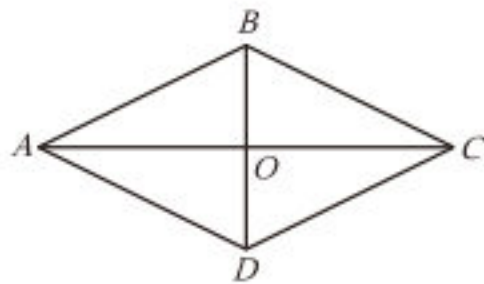
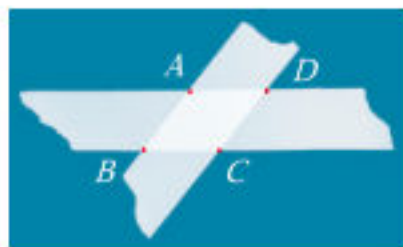


图 1-7

随堂练习

- 你能用折纸的方法得到一个菱形吗? 动手试一试, 并说明你的方法的正确性。
- 如图, 两张等宽的纸条交叉重叠在一起, 重叠的部分 $ABCD$ 是菱形吗? 为什么?



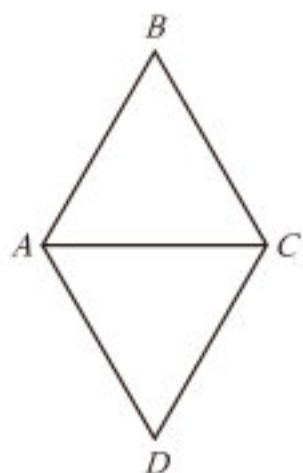
(第 2 题)



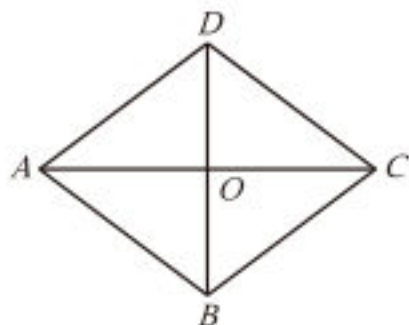
习题1.2

> 知识技能

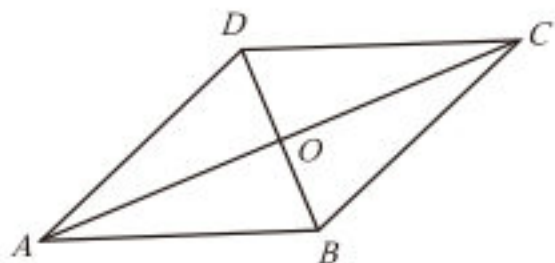
1. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 2\angle B$ 。
求证： $\triangle ABC$ 是等边三角形。
2. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $BD = 6$ ， $AC = 8$ ，求菱形 $ABCD$ 的周长。



(第1题)

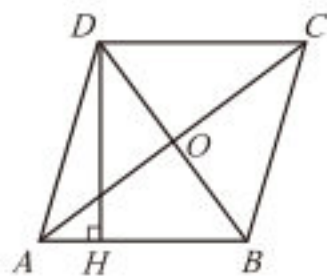


(第2题)

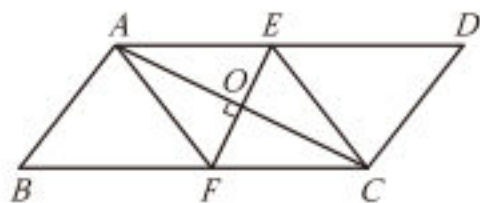


(第3题)

3. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O 。
求证： AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 。
4. 证明：菱形的面积等于其对角线长的乘积的一半。
5. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，且 $AC = 16$ ， $BD = 12$ ，求菱形 $ABCD$ 的高 DH 。



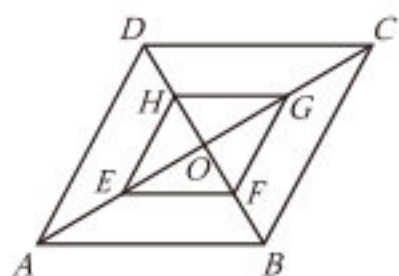
(第5题)



(第6题)

6. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线分别与 AD ， AC ， BC 相交于点 E ， O ， F 。求证：四边形 $AFCE$ 是菱形。

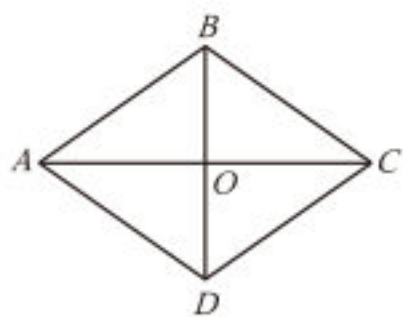
7. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，点 E, F, G, H 分别是 OA, OB, OC, OD 的中点。求证：四边形 $EFGH$ 是菱形。



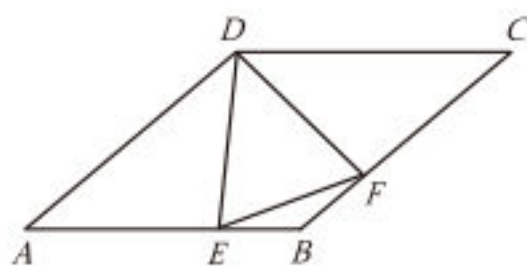
(第7题)

> 数学理解

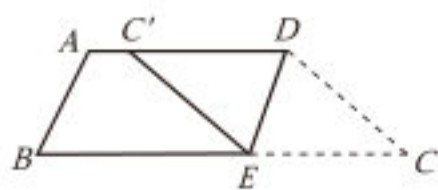
8. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，图中有多少个等腰三角形？有多少个直角三角形？
9. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， E, F 分别是边 AB 和 BC 上的点，且 $BE = BF$ 。从上述条件出发，你能提出哪些问题？从你提出的问题中选择一个加以解答。



(第8题)



(第9题)

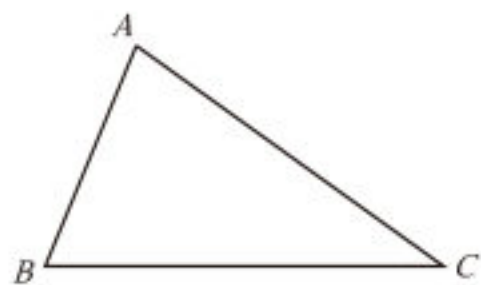


(第10题)

10. 如图，在四边形纸片 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD > BC$ ，将纸片沿过点 D 的直线折叠，使点 C 落在 AD 边上的点 C' 处，折痕交 BC 于点 E ，连接 $C'E$ 。试判断四边形 $CDC'E$ 的形状，并证明你的结论。
11. 还记得用尺规作线段垂直平分线的方法吗？请用本节所学的定理说明这种作法的正确性。

> 问题解决

12. 如图，你能用一张锐角三角形纸片 ABC 折出一个菱形，使 $\angle A$ 为菱形的一个内角吗？写出你的折纸步骤，画出图形，并说明你的方法的正确性。



(第12题)

3

矩形的性质与判定

矩形也是特殊的平行四边形，类比菱形的学习，你认为需要研究矩形的哪些问题？怎样研究呢？与同伴进行交流。

尝试·思考

你认为矩形有哪些特殊的性质？你是怎样发现的？能证明这些性质吗？

可以发现：矩形的四个角都是直角，对角线相等。下面我们证明这些结论。

已知：如图 1-8，四边形 $ABCD$ 是矩形， $\angle ABC = 90^\circ$ ，对角线 AC 与 DB 相交于点 O 。

求证：(1) $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$ ；(2) $AC = DB$ 。

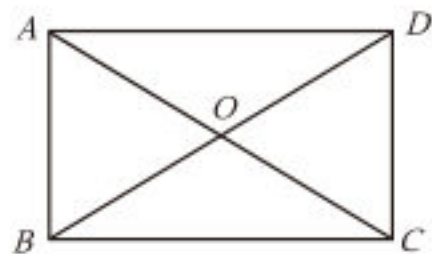


图 1-8

证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC = \angle CDA$, $\angle BCD = \angle DAB$ (矩形的对角相等),
 $AB \parallel DC$ (矩形的对边平行)。

$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ 。

又 $\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$ 。

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = DC$ (矩形的对边相等)。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$\because AB = DC$, $\angle ABC = \angle DCB$, $BC = CB$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$ 。

$\therefore AC = DB$ 。

定理 矩形的四个角都是直角。

定理 矩形的对角线相等。

观察·思考

如图 1-9 (1), 在矩形纸片 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 E 。将矩形纸片沿 AC 剪开, 得到如图 1-9 (2) 所示的图形, BE 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中一条怎样的线段? 它与 AC 有什么大小关系? 由此你能得到什么结论?

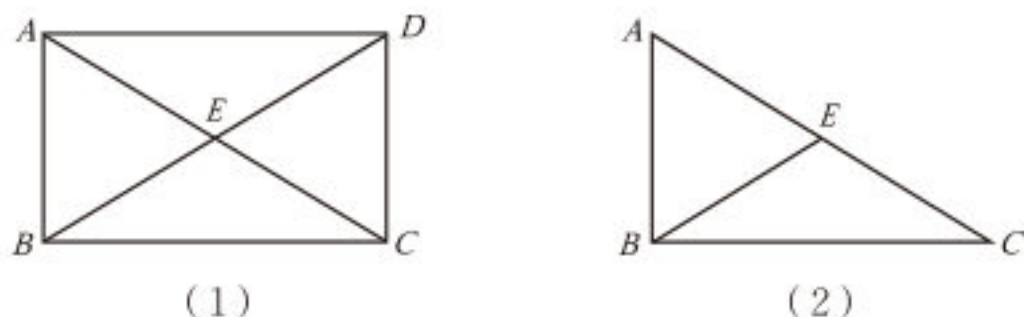


图 1-9

定理 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

请你完成这个定理的证明。

例1 如图 1-10, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $\angle AOD = 120^\circ$, $AB = 2.5$, 求这个矩形对角线的长。

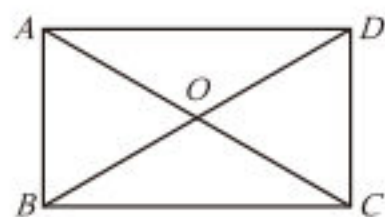


图 1-10

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle DAB = 90^\circ$ (矩形的四个角都是直角),

$AC = BD$ (矩形的对角线相等),

$OA = OC = \frac{1}{2} AC$, $OB = OD = \frac{1}{2} BD$ (矩形的对角线互相平分)。

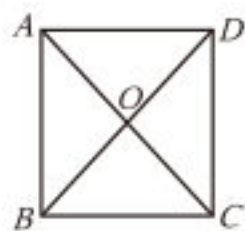
$\therefore OA = OD$ 。

$$\begin{aligned}
 \because \angle AOD &= 120^\circ, \\
 \therefore \angle ODA &= \angle OAD \\
 &= \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ. \\
 \therefore BD &= 2AB = 2 \times 2.5 = 5.
 \end{aligned}$$

还有其他解法吗?

随堂练习

1. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AB = 6$, $OA = 4$, 求 BD 与 AD 的长。



(第1题)

还记得我们是怎样得到菱形的判定条件的吗? 你能用类似的方法发现矩形的判定条件吗?

思考·交流

你能写出矩形性质定理的逆命题吗? 它们都是真命题吗? 为什么? 与同伴进行交流。

可以发现: 有三个角是直角的四边形是矩形, 对角线相等的平行四边形是矩形。下面证明第二个结论, 第一个结论的证明请你自己完成。

已知: 如图 1-11, 在 $\square ABCD$ 中, AC , DB 是两条对角线, $AC = DB$ 。
求证: $\square ABCD$ 是矩形。

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = DC, AB \parallel DC.$$

$$\text{又} \because BC = CB, AC = DB,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DCB.$$

$$\therefore AB \parallel DC,$$

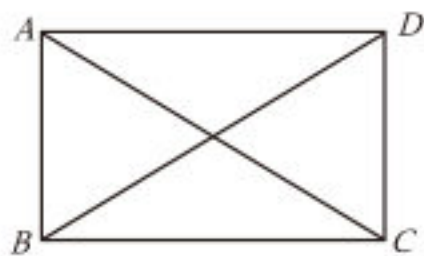


图 1-11

$$\begin{aligned}\therefore \angle ABC + \angle DCB &= 180^\circ. \\ \therefore \angle ABC = \angle DCB &= \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ. \\ \therefore \square ABCD &\text{ 是矩形 (矩形的定义).}\end{aligned}$$

定理 有三个角是直角的四边形是矩形。

定理 对角线相等的平行四边形是矩形。

例2 如图 1-12, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $\triangle ABO$ 是等边三角形, $AB = 4$, 求 $\square ABCD$ 的面积。

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore OA = OC, OB = OD$.
 又 $\because \triangle ABO$ 是等边三角形,
 $\therefore OA = OB = AB = 4$.
 $\therefore OA = OB = OC = OD = 4$.
 $\therefore AC = BD = 2OA = 2 \times 4 = 8$.
 $\therefore \square ABCD$ 是矩形 (对角线相等的平行四边形是矩形).
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ (矩形的四个角都是直角).

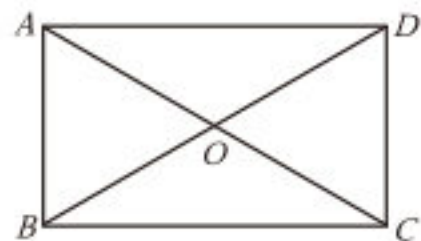


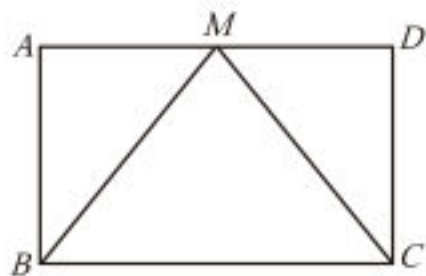
图 1-12

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得

$$\begin{aligned}AB^2 + BC^2 &= AC^2, \\ \therefore BC &= \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}. \\ \therefore \square ABCD \text{ 的面积} &= AB \cdot BC = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.\end{aligned}$$

随堂练习

1. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, M 是边 AD 的中点, 且 $MB = MC$.
 求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形。



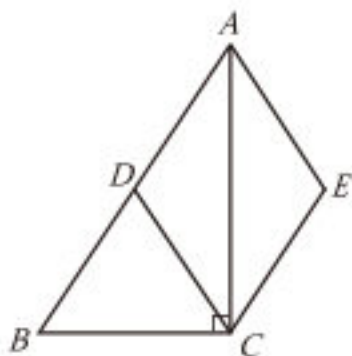
(第 1 题)



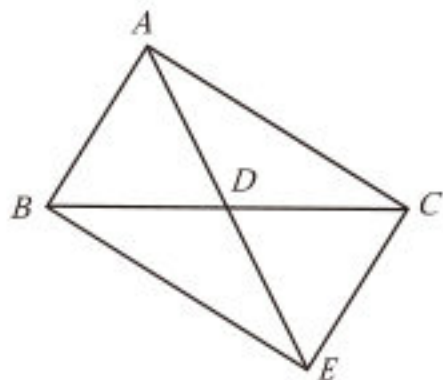
习题1.3

> 知识技能

1. 一个矩形的对角线长为6, 对角线与一边的夹角是 45° , 求这个矩形各边的长。
2. 一个矩形的两条对角线的一个夹角为 60° , 对角线长为15, 求这个矩形较短边的长。
3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 为 AB 的中点, $AE \parallel CD$, $CE \parallel AB$, 试判断四边形 $ADCE$ 的形状, 并证明你的结论。

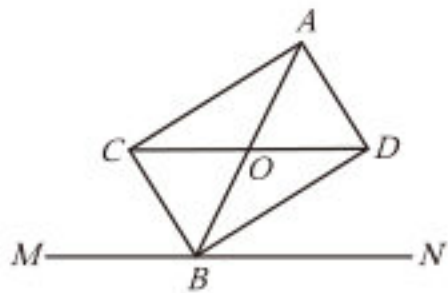


(第3题)



(第4题)

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, 延长 AD 至 E , 使 $DE = AD$, 连接 BE , CE .
 (1) 试判断四边形 $ABEC$ 的形状;
 (2) 当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时, 四边形 $ABEC$ 是矩形?
5. 如图, 点 B 在线段 MN 上, 过线段 AB 的中点 O 作 MN 的平行线, 分别交 $\angle ABM$ 的平分线和 $\angle ABN$ 的平分线于点 C , D 。试判断四边形 $ACBD$ 的形状, 并证明你的结论。

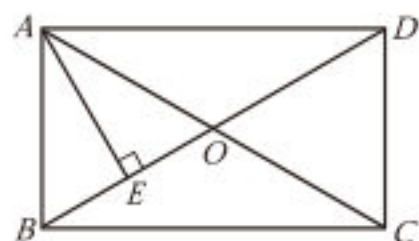


(第5题)

> 数学理解

6. 证明: 如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半, 那么这个三角形是直角三角形。

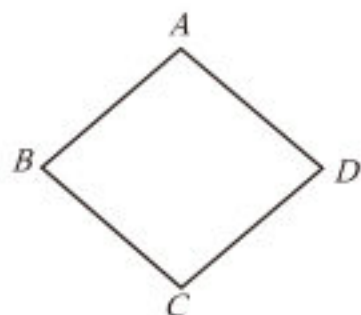
7. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=6$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AE \perp BD$, 垂足为 E , $ED=3BE$, 求 AE 的长。



(第7题)

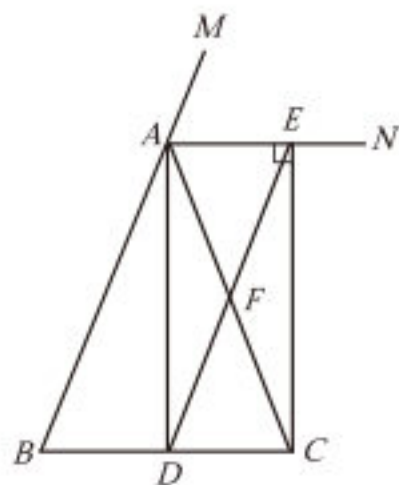
问题解决

8. 如图, 已知菱形 $ABCD$, 画一个矩形, 使得 A, B, C, D 四点分别在矩形的四条边上, 且矩形的面积为菱形 $ABCD$ 面积的 2 倍, 并说明你画图的正确性。
9. 你有哪些方法检查你家 (或教室) 门框的形状是不是矩形? 如果仅有一根足够长的绳子, 你怎样检查? 请说明检查方法的正确性。



(第8题)

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线, AN 为 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAM$ 的平分线, $CE \perp AN$, 垂足为 E 。连接 DE , 交 AC 于点 F 。
- (1) 试判断四边形 $ABDE$ 的形状, 并证明你的结论。
- (2) 线段 DF 与 AB 有怎样的关系? 请证明你的结论。

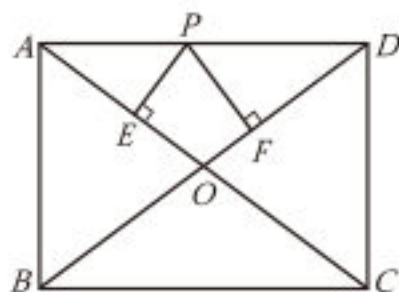


(第10题)

- ※11. 如图, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=6\text{ cm}$, $BC=8\text{ cm}$, 将矩形纸片折叠, 使点 C 与点 A 重合。请在图中画出折痕, 并求折痕的长。



(第11题)



(第12题)

- ※12. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=4$, P 是 AD 上不与 A 和 D 重合的一个动点, 过点 P 分别作 AC 和 BD 的垂线, 垂足为 E, F 。求 $PE+PF$ 的值。

4

正方形的性质与判定

还记得正方形的定义吗？正方形与菱形有怎样的关系？与矩形呢？

思考·交流

- (1) 正方形是菱形吗？正方形是矩形吗？
- (2) 你认为正方形有哪些特殊的性质？与同伴进行交流。

由正方形的定义可知，正方形既是菱形，又是矩形，它具有菱形和矩形的所有性质。

定理 正方形的四个角都是直角，四条边相等。

定理 正方形的对角线相等且互相垂直平分。

请你完成这两个定理的证明。

例1 如图 1-13，在正方形 $ABCD$ 中， E 是边 CD 上的一点， F 是 BC 延长线上的一点，且 $CE = CF$ 。 BE 与 DF 之间有怎样的关系？请说明理由。

解： $BE = DF$ ，且 $BE \perp DF$ 。理由如下。

- (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore BC = DC$ ， $\angle BCE = 90^\circ$ （正方形的四条边相等，四个角都是直角）。
 $\therefore \angle DCF = 180^\circ - \angle BCE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ 。
 $\therefore \angle BCE = \angle DCF$ 。
 又 $\because CE = CF$ ，
 $\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$ 。
 $\therefore BE = DF$ 。

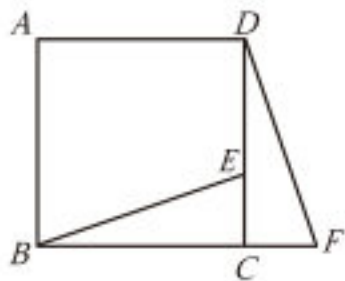


图 1-13

(2) 延长 BE , 交 DF 于点 M (如图 1-14)。

$$\because \triangle BCE \cong \triangle DCF,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CDF.$$

$$\because \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF + \angle F = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle CBE + \angle F = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BMF = 180^\circ - (\angle CBE + \angle F) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

$$\therefore BE \perp DF.$$

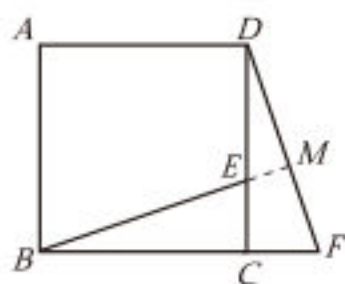


图 1-14

尝试·交流

如图 1-15, 四边形 $ABCD$ 是正方形。

(1) 请在图 1-15 中画一个菱形, 使菱形的两个顶点分别与点 A, C 重合, 并与同伴交流你的思考过程。

(2) 请在图 1-15 中画一个矩形 $EFGH$, 使矩形的四个顶点 E, F, G, H 依次在正方形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 上, 并与同伴交流你的思考过程。

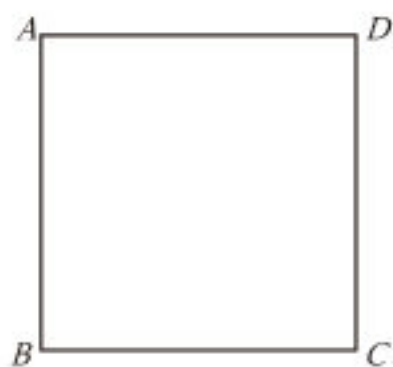
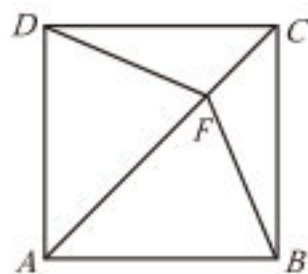


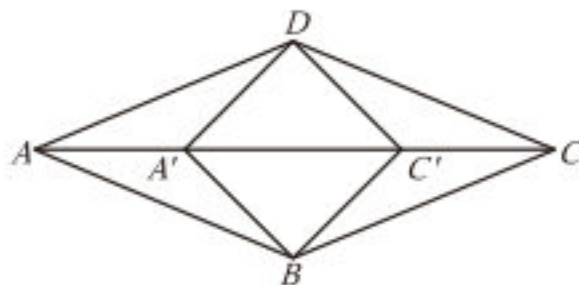
图 1-15

随堂练习

- 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, F 为对角线 AC 上的一点, 连接 BF, DF 。请找出图中的全等三角形, 并选择其中一对进行证明。
- 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 将 A, C 两点沿对角线 AC 分别移动到 A', C' 的位置, 得到正方形 $A'BC'D$ 。已知菱形 $ABCD$ 的面积为 120 cm^2 , 正方形 $A'BC'D$ 的面积为 50 cm^2 , 求 AC 的长。



(第 1 题)



(第 2 题)

满足什么条件的矩形是正方形？满足什么条件的菱形是正方形？请证明你的结论，并与同伴进行交流。

定理 有一组邻边相等的矩形是正方形。

定理 对角线互相垂直的矩形是正方形。

定理 有一个角是直角的菱形是正方形。

定理 对角线相等的菱形是正方形。

例2 已知：如图 1-16，在矩形 $ABCD$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ ， CE 平分 $\angle DCB$ ， $BF \parallel CE$ ， $CF \parallel BE$ 。

求证：四边形 $BECF$ 是正方形。

证明： $\because BF \parallel CE, CF \parallel BE$,

$\therefore$ 四边形 $BECF$ 是平行四边形。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \angle DCB = 90^\circ$ 。

又 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ， CE 平分 $\angle DCB$ ，

$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ, \angle ECB = \frac{1}{2} \angle DCB = 45^\circ$ 。

$\therefore \angle EBC = \angle ECB$ 。

$\therefore EB = EC$ 。

$\therefore \square BECF$ 是菱形（菱形的定义）。

在 $\triangle EBC$ 中，

$\because \angle EBC = 45^\circ, \angle ECB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BEC = 180^\circ - \angle EBC - \angle ECB = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ 。

$\therefore$ 菱形 $BECF$ 是正方形（有一个角是直角的菱形是正方形）。

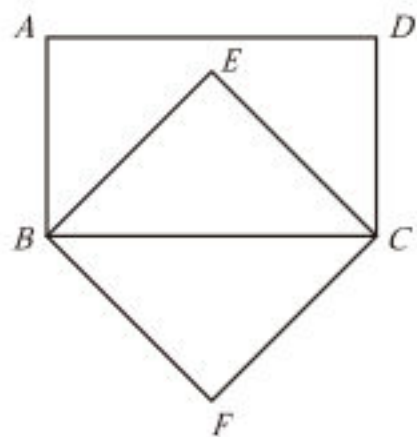


图 1-16

尝试·思考

(1) 如图 1-17，四边形 $ABCD$ 是正方形，以它四边的中点为顶点的四边形，是一个怎样的四边形？先猜一猜，再证明你的猜想。如果四边形 $ABCD$ 是矩形呢？

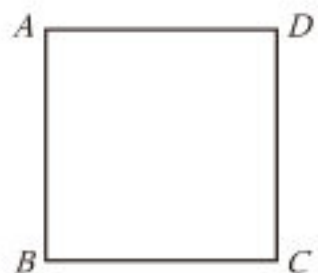


图 1-17

- (2) 类比上述问题, 你还能提出什么问题? 你能解决它们吗?
- (3) 在上述问题的解决过程中, 你发现了什么规律? 请说明理由。

回顾·反思

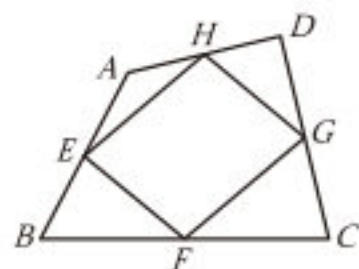
回顾平行四边形和特殊平行四边形的性质及判定条件的探究过程, 你有哪些感悟? 积累了哪些经验?

随堂练习

1. 证明:

- (1) 对角线互相垂直的矩形是正方形;
- (2) 有一个角是直角的菱形是正方形。

2. 如图, 任意画一个四边形, 再以四边的中点为顶点画一个新四边形, 这个新四边形的形状有什么特征? 请证明你的结论。



(第2题)

阅读·思考

四边形的对称性

我们知道, 一般的四边形既不一定是轴对称图形, 也不一定是中心对称图形; 平行四边形都是中心对称图形, 却不一定是轴对称图形; 所有的菱形和矩形既是中心对称图形, 又是轴对称图形, 而且它们都至少有两对称轴。请你想一想, 画一画, 什么情况下菱形和矩形只有两条对称轴? 什么情况下它们有两条以上的对称轴?

通过想象或实际画图, 可以发现, 当菱形有一个角为直角时, 它的对称轴的数量就增加了; 当矩形有一组邻边相等时, 它的对称轴的数量也增加了。换句话

说,当菱形或矩形成为正方形时,它的对称轴就不止两条了。由此我们看到,当图形从一般情况向特殊情况变化时,它的对称性也随之发生了变化(如图1-18)。

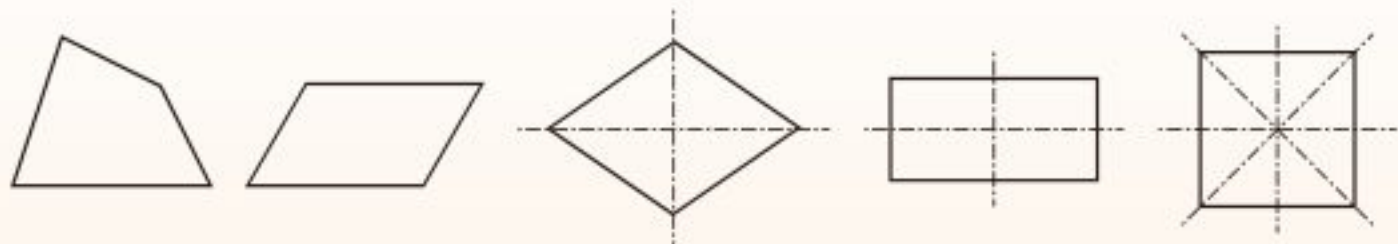


图 1-18

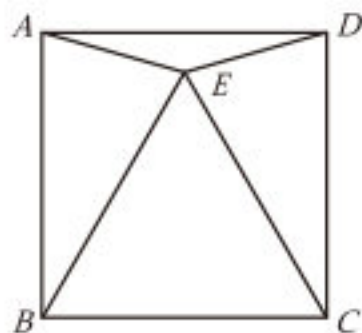
此外,我们还知道,如果把一个图形绕着某一点旋转一定角度(小于 360°)后,能够与原来的图形重合,那么这个图形叫作旋转对称图形。请你想一想,试一试,平行四边形是旋转对称图形吗?菱形呢?矩形呢?正方形呢?



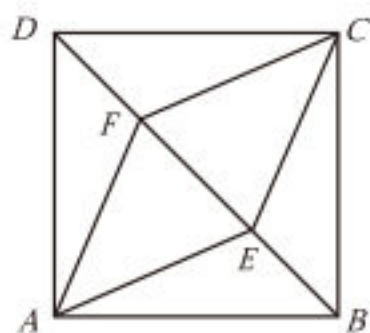
习题1.4

> 知识技能

1. 对角线长为 2 cm 的正方形,其边长是多少?
2. 如图,四边形 $ABCD$ 是正方形, $\triangle BCE$ 是等边三角形,求 $\angle AEB$ 的度数。



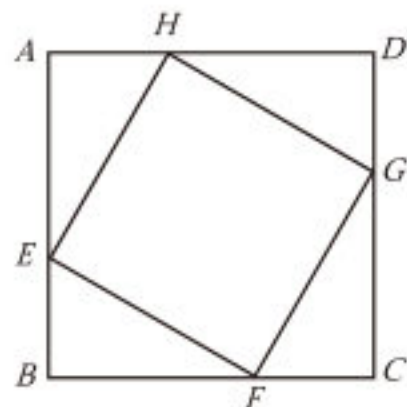
(第2题)



(第3题)

3. 已知:如图, E, F 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的两点,且 $BE = DF$ 。
求证: 四边形 $AECF$ 是菱形。

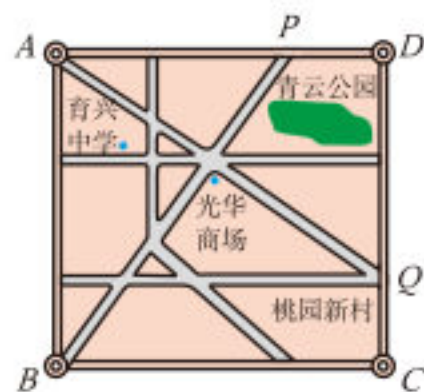
4. 如图, 点 E, F, G, H 分别在正方形 $ABCD$ 的四条边上, 且 $AE = BF = CG = DH$ 。试判断四边形 $EFGH$ 的形状, 并证明你的结论。



(第4题)

> 数学理解

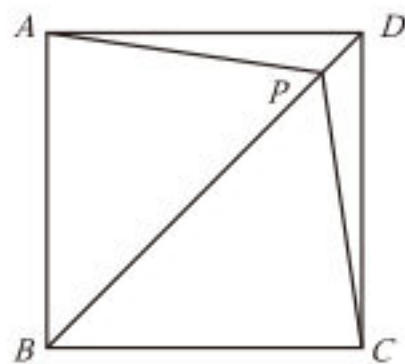
5. 如图, A, B, C, D 四家工厂分别坐落在正方形城镇的四个角上。仓库 P 和 Q 分别位于 AD 和 DC 上, 且 $PD = QC$, BP, AQ 是两条直路。证明 $BP = AQ$, 且 $BP \perp AQ$ 。



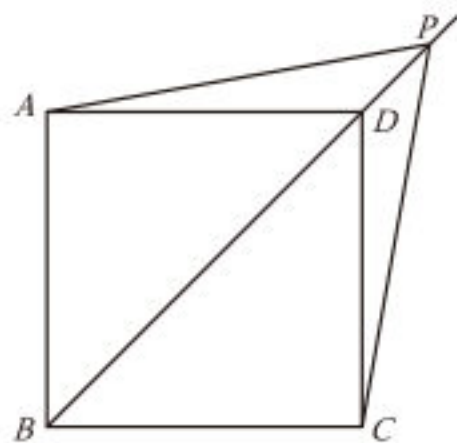
(第5题)

> 问题解决

- ※6. 作两条直线, 将正方形分成大小、形状完全相同的四部分。你有几种方法? 请至少说出三种。
7. (1) 如图(1), 四边形 $ABCD$ 是正方形, 点 P 在对角线 BD 上, 连接 AP, CP 。线段 AP 与 CP 的长度有怎样的关系? 如图(2), 如果点 P 在对角线 BD 的延长线上呢? 请证明你的结论。
- (2) 你还可以提出什么问题?



(1)

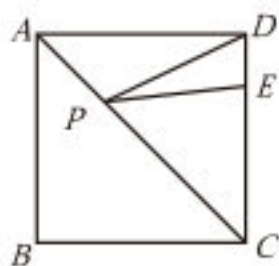


(2)

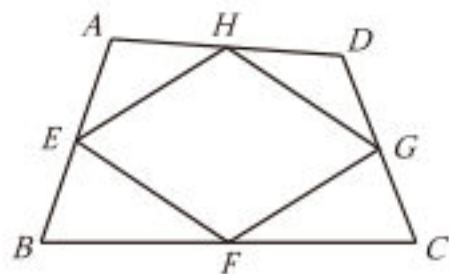
(第7题)

> 联系拓广

8. 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, E 是边 CD 上的一点, 且 $DE = 2$, $CE = 3DE$ 。当点 P 在对角线 AC 上运动时, $PD + PE$ 的最小值是多少?



(第8题)



(第9题)

9. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F, G, H 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点。
- (1) 当四边形 $ABCD$ 满足什么条件时, 四边形 $EFGH$ 是菱形? 请说明理由。
 - (2) 当四边形 $ABCD$ 满足什么条件时, 四边形 $EFGH$ 是矩形? 请说明理由。



问题解决活动：作内嵌于正方形的正八边形

问题 在一些建筑上可以看到多边形相互嵌套的图案。例如，图 1-19 所示的古建筑藻井图案就是一个正方形里面嵌套了多个正八边形。



图 1-19

如果一个正方形里面嵌套了一个正八边形，且正八边形至少有四个顶点分别在正方形的四条边上，那么我们称这个正八边形内嵌于这个正方形。

你能用尺规作内嵌于正方形的正八边形吗？

理解问题

- (1) 正八边形内嵌于正方形，可能有哪些情形？请你画出相应的草图。
- (2) 正八边形有哪些具体特征？

拟订计划

(1) 观察你画的草图，分析其中的正八边形满足哪些特定条件。例如，正八边形经过哪些特殊的点，图中的角、线段具有哪些确定的数量关系，具有哪些特殊的角，边长有哪些特点，等等。

(2) 根据你的分析，说说用尺规作这个正八边形的大致思路。整理自己的思路，并与同伴进行交流。

也可以用数学软件画出内嵌于正方形的正八边形，观察并分析不同情形下正八边形满足哪些特定的条件。

实施计划

- (1) 你的作图思路正确吗？说明其中的道理。

(2) 请你用尺规作一个内嵌于正方形的正八边形, 并与同伴进行分享。

回顾反思

(1) 通过探究, 你得到了哪些作图方法? 这些方法各有什么特点?

(2) 在探索作图方法的过程中, 你积累了哪些经验? 与同伴进行交流。

请你解决下列问题。

1. 当一个矩形的四个顶点分别在已知菱形的四条边上时, 我们称这个矩形是菱形的内接矩形。如图 1-20, 已知菱形 $ABCD$, 请用尺规作出它的一个内接矩形。

2. 尝试用一张正方形纸片折出一个正八边形。

3. 学完本节后, 你还想到哪些值得研究的问题? 将你的问题及研究成果整理成一篇小论文, 并在班级内分享。

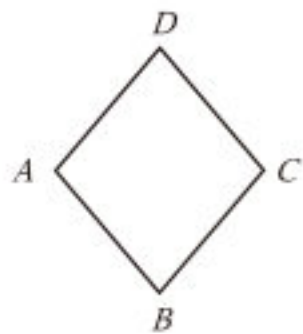


图 1-20



回顾与思考

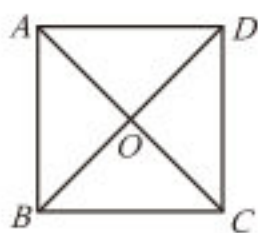
1. 说说平行四边形、菱形、矩形、正方形之间的关系，它们各有哪些性质？
2. 菱形、矩形、正方形的对称性对你发现它们的其他性质有怎样的帮助？
3. 画图说明判定一个四边形是菱形、矩形、正方形的条件。
4. 回顾特殊平行四边形的研究过程，你是怎样发现它们的性质和判定条件的？与同伴进行交流。
5. 在证明特殊平行四边形的性质定理和判定定理的过程中，你积累了哪些经验？与同伴进行交流。
6. 梳理本章内容，用适当的方式呈现全章知识结构，并与同伴进行交流。



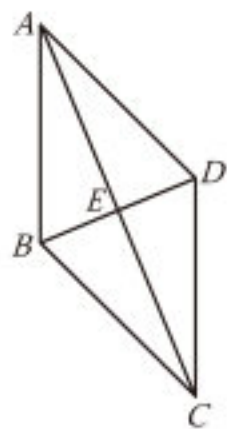
复习题

> 知识技能

1. 一个菱形的两条对角线的长分别为 4 cm 和 8 cm，求它的边长。
2. 如图，若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，且 $OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$ ，则四边形 $ABCD$ 是正方形吗？
3. 如果一个四边形是轴对称图形，而且有两条互相垂直的对称轴，那么这个四边形一定是菱形吗？为什么？
4. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 13 cm 的菱形，其中对角线 $BD = 10$ cm。求：
 - (1) 对角线 AC 的长度；
 - (2) 菱形 $ABCD$ 的面积。



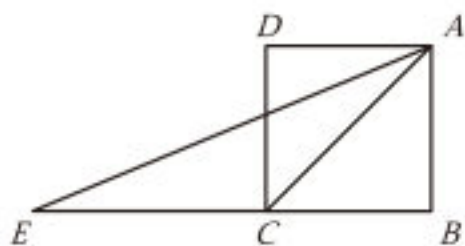
(第 2 题)



(第 4 题)

5. 证明：如果四边形的两条对角线互相垂直且相等，那么以它四边的中点为顶点可画出一个正方形。

6. 如图，四边形 $ABCD$ 是一个正方形， E 是 BC 延长线上的一点，且 $EC = AC$ ，求 $\angle DAE$ 的度数。



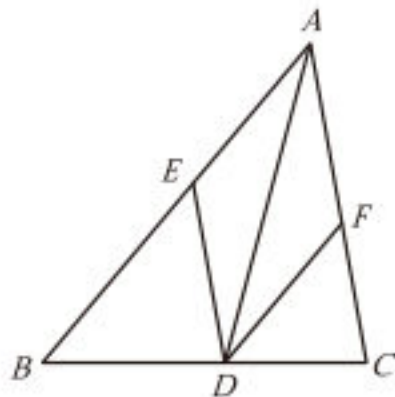
(第6题)

7. (1) 如果一个菱形绕它的对角线的交点旋转 90°

后，所得图形与原来的图形重合，那么这个菱形是正方形吗？为什么？

- (2) 如果一个四边形绕它的对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个四边形是正方形吗？为什么？

8. 已知：如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，过点 D 分别作 AC 和 AB 的平行线，交 AB 于点 E ，交 AC 于点 F 。求证：四边形 $AEDF$ 是菱形。



(第8题)

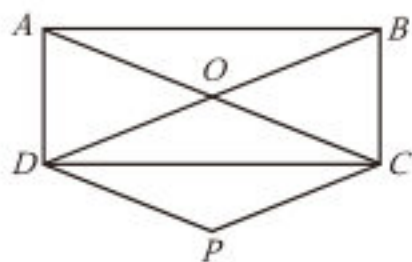
9. 已知： $\triangle ABC$ 的两条高分别为 BE ， CF ，点 M 为 BC 的中点。

求证： $ME = MF$ 。

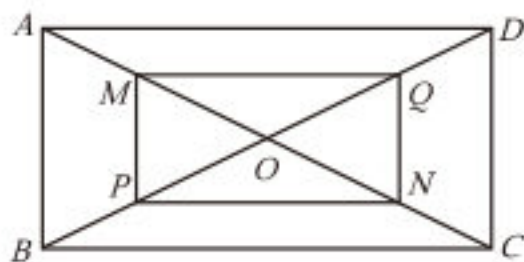
10. 已知正方形对角线的长为 l ，求这个正方形的周长和面积。

11. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 C 作 BD 的平行线，过点 D 作 AC 的平行线，两条线相交于点 P 。

求证：四边形 $CODP$ 是菱形。



(第11题)



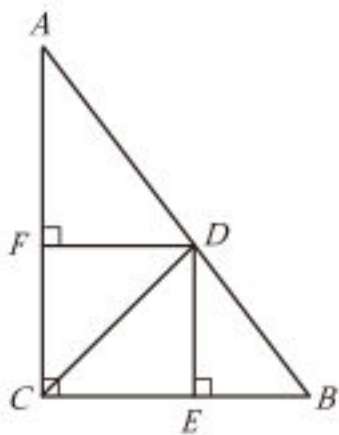
(第12题)

12. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，点 M ， P ， N ， Q 分别在线段 AO ， BO ， CO ， DO 上，且 $AM = BP = CN = DQ$ 。

求证：四边形 $MPNQ$ 是矩形。

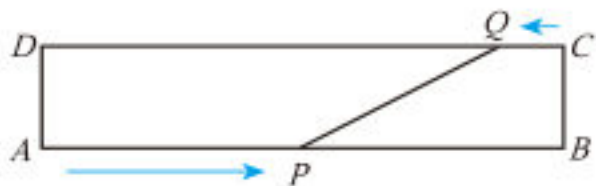
13. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp BC$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为 E ， F 。

求证：四边形 $CEDF$ 是正方形。



(第13题)

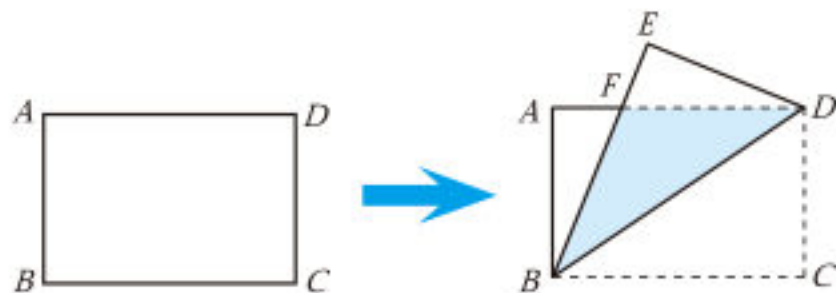
14. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 20$ cm。动点 P 从点 A 出发沿 AB 方向以 4 cm/s 的速度运动, 动点 Q 同时从点 C 出发沿 CD 方向以 1 cm/s 的速度运动。当其中一点到达终点时, 另一点也随之停止运动。设动点的运动时间为 t s, 则当 t 为多少时, 四边形 $APQD$ 是矩形?



(第 14 题)

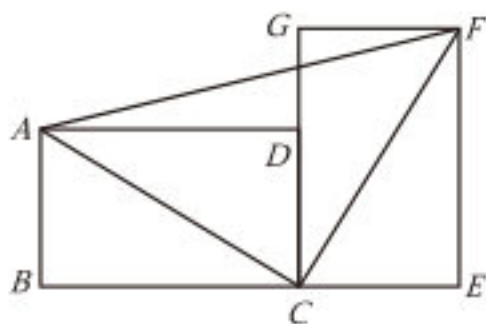
> 数学理解

15. 如图, 把一张矩形纸片沿对角线折叠, 重合部分是什么图形? 试说明理由。

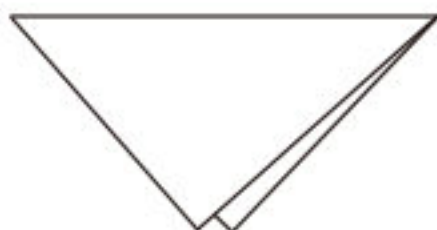


(第 15 题)

16. 如图, 把两个大小、形状完全相同的矩形 $ABCD$ 和矩形 $CEFG$ 拼成如图所示的形状, 求 $\angle ACF$, $\angle AFC$ 的度数。



(第 16 题)

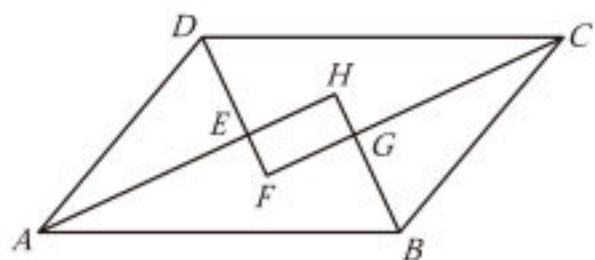


(第 17 题)

17. 小颖在商店里看到一块漂亮的方纱巾, 她非常想买, 但当她拿起来时, 又感觉纱巾不太方。商店老板看她犹豫的样子, 马上过来将纱巾沿一条对角线对折, 让小颖检验 (如图)。小颖还是有些疑惑, 老板又将纱巾沿另一条对角线对折, 让小颖检验。小颖发现, 两次对折后两组对角都能分别对齐, 终于下决心买下这块纱巾。你认为小颖买的这块纱巾一定是正方形的吗? 用什么方法可以检验纱巾是不是正方形的?

18. 已知：如图， $\square ABCD$ 各角的平分线分别相交于点 E, F, G, H 。

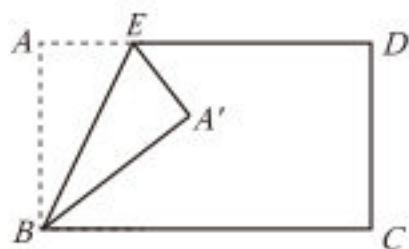
求证：四边形 $EFGH$ 是矩形。



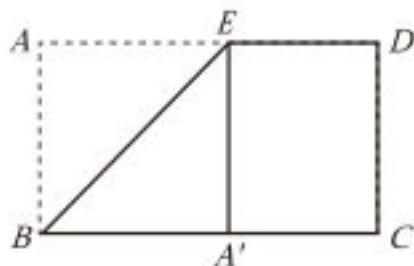
(第 18 题)

> 问题解决

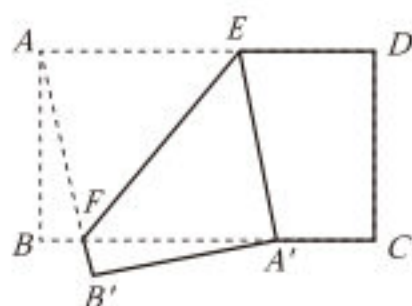
19. (1) 如图 (1)，将矩形纸片 $ABCD$ 沿 BE 折叠，顶点 A 落在纸片 $ABCD$ 内的点 A' 。展开纸片，得到四边形 $ABA'E$ ，这个四边形有哪些性质？
- (2) 如图 (2)，将矩形纸片 $ABCD$ 沿 BE 折叠，顶点 A 落在 BC 边上的点 A' 。展开纸片，得到四边形 $ABA'E$ ，这个四边形是正方形吗？为什么？
- (3) 如图 (3)，将矩形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠，顶点 A 落在 BC 边上的点 A' ，顶点 B 落在纸片外的点 B' 。展开纸片，得到四边形 $AFA'E$ ，试判断这个四边形的形状，并证明你的结论。



(1)



(2)



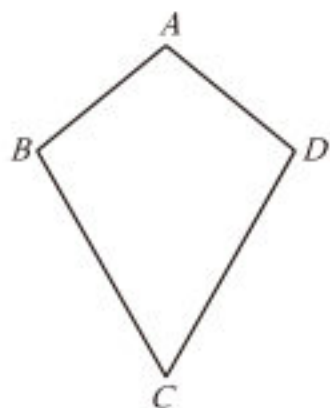
(3)

(第 19 题)

20. 请查阅资料，了解我国古建筑中特殊平行四边形的运用，制作演示文档并在班级内交流。
21. 结合平行四边形和特殊平行四边形的学习，联系自己的数学学习经验，以“特殊与一般的关系”为主题写一篇小短文，并在班级内分享。

> 联系拓广

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $CB = CD$ ，像这样的四边形称为筝形。



(第 22 题)

- (1) 类比平行四边形和特殊平行四边形的研究，你认为可以研究筝形哪些方面的问题？

※ (2) 请你探索筝形的性质，并加以证明。

第二章

一元二次方程

一架斜靠在墙上的梯子，当其顶端下滑一段距离时，其底端也会滑动相同距离吗？五个连续整数，前三个数的平方和等于后两个数的平方和，你能找出这样的一组整数吗？虽然这些问题看似毫无关系，但是解决它们的方法却有内在的联系。

本章将在一元一次方程的基础上，进一步学习一元二次方程。你将经历从实际问题中抽象出一元二次方程的过程，研究一元二次方程的各种解法，运用一元二次方程解决一些简单实际问题，不断发展抽象能力、运算能力、模型观念等，增强应用意识。

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2。$$

你还能找到具有这样规律的五个连续整数吗？



在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：



💡 研究某一类方程，一般会经历怎样的过程？

💡 一元二次方程的不同解法各有什么特点？这些解法体现了怎样的共性？

1

认识一元二次方程

幼儿园某教室矩形地面的长为 8 m，宽为 5 m，现准备在地面正中间铺设一块面积为 18 m^2 的地毯（如图 2-1），四周未铺地毯的条形区域的宽度都相等，你能求出这个宽度吗？



图 2-1

如果设所求的宽度为 $x \text{ m}$ ，那么你能列出怎样的方程？

观察·思考

观察下面等式：

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

你还能找到五个连续整数，使前三个数的平方和等于后两个数的平方和吗？

如果将这五个连续整数中的第一个数设为 x ，那么怎样用含 x 的代数式表示其余四个数？根据题意，你能列出怎样的方程？

尝试·思考

如图 2-2，一架长为 10 m 的梯子斜靠在墙上，梯子顶端到地面的垂直距离为 8 m。如果梯子顶端下滑 1 m，那么梯子底端滑动多少米？

你能计算出滑动前梯子底端到墙的距离吗？如果设梯子底端滑动 $x \text{ m}$ ，那么你能列出怎样的方程？

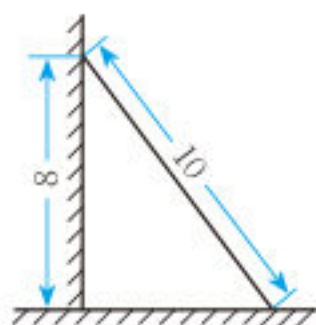


图 2-2

观察·交流

由上面三个问题，我们可以得到三个方程：

$$\begin{aligned}(8-2x)(5-2x) &= 18, \\ x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 &= (x+3)^2 + (x+4)^2, \\ (x+6)^2 + 7^2 &= 10^2.\end{aligned}$$

这三个方程有什么共同特点？与同伴进行交流。

上面的方程都是只含有一个未知数 x 的整式方程^❶，并且都可以化成 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$) 的形式，这样的方程叫作一元二次方程 (quadratic equation with one unknown)。

我们把 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$) 称为一元二次方程的一般形式，其中 ax^2 ， bx ， c 分别称为二次项、一次项和常数项， a ， b 分别称为二次项系数和一次项系数。

随堂练习

1. 根据题意列出一元二次方程：已知直角三角形的三边长为连续整数，求它的三边长。
2. 把方程 $(3x+2)^2 = 4(x-3)^2$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项。

对于上一课的第一个问题，你能设法估计四周末铺地毯的条形区域的宽度 x (单位：m) 吗？

我们知道， x 满足方程

$$(8-2x)(5-2x) = 18.$$

(1) x 可能小于 0 吗？可能大于 4 吗？可能大于 2.5 吗？说说你的理由。

(2) 你能确定 x 的大致范围吗？

❶ 等号两边都是关于未知数的整式的方程，称为整式方程。

(3) 填写下表。

x	0.5	1	1.5	2
$(8-2x)(5-2x)$				

(4) 你知道所求宽度 x (单位: m) 是多少吗? 还有其他求解方法吗? 与同伴进行交流。

尝试·思考

在上一课的问题中, 梯子底端滑动的距离 x (单位: m) 满足方程

$$(x+6)^2 + 7^2 = 10^2,$$

也就是

$$x^2 + 12x - 15 = 0.$$

(1) 小明认为底端也滑动了 1 m, 他的说法正确吗? 为什么?

(2) 底端滑动的距离可能是 2 m 吗? 可能是 3 m 吗? 为什么?

(3) 你能猜出滑动距离 x (单位: m) 的大致范围吗?

(4) x 的整数部分是几? 十分位是几?

思考·交流

小亮求解上述“尝试·思考”问题的过程如下。

x	0	0.5	1	1.5	2
$x^2 + 12x - 15$	-15	-8.75	-2	5.25	13

所以 $1 < x < 1.5$ 。

进一步计算:

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$x^2 + 12x - 15$	-0.59	0.84	2.29	3.76

所以 $1.1 < x < 1.2$ 。

因此 x 的整数部分是 1, 十分位是 1。

(1) 你明白小亮估算一元二次方程的解的想法吗? 与同伴进行交流。

(2) 如果要把 x 的小数部分精确到百分位, 应该怎么做呢? 说说你的想法。

随堂练习

1. 五个连续整数，前三个数的平方和等于后两个数的平方和。这五个整数分别是多少？

阅读·思考

确定一元二次方程近似解的一种方法

本节课，我们通过不断缩小范围得到了一元二次方程的近似解。在数学学习和生产生活中，有很多这样通过缩小范围确定结果的例子。例如，估计 $\sqrt{2}$ 的近似值，在某段线路上找出发生故障的那个点……

缩小范围的一种常用方法是：找出初始范围的中间点，判断解在中间点的哪一侧，得到一个新的范围，然后对这个新的范围进行类似操作……直到最终的结果符合实际问题的精确度要求。

例如，一个具体问题中， x 满足方程 $(x-10)(x-20)=140$ ，其中 $x>20$ 。

第一步：估计 x 的大致范围。根据题意可知， $x>20$ ，且 x 越大，方程左边的值就越大。不妨设 $x=30$ ，可以计算出此时方程左边的值是 200， $200>140$ ，因此可以确定 $20<x<30$ 。

第二步：缩小 x 的范围。令 x 取 20 和 30 的中间值 25，此时方程左边的值是 75， $75<140$ ，因此可以将 x 的范围缩小为 $25<x<30$ 。

不断重复第二步的操作，依次得到 x 的范围：

$$27.5 < x < 30, 27.5 < x < 28.75, 27.5 < x < 28.125, \dots$$

最后按照实际需要确定近似解。如果实际问题中要求 x 精确到个位，那么 $x \approx 28$ 。

可以看出，用这种方法缩小范围时，精确度要求越高，步骤也会越多，但操作过程是类似的，甚至是“机械的”，因此可以借助计算机程序进行运算操作。

生活中，你运用过类似的方法分析和解决问题吗？



习题2.1

> 知识技能

1. 根据题意，列出一元二次方程：

(1) 有一个面积为 54 cm^2 的矩形，将它的一边剪短 5 cm ，另一边剪短 2 cm ，恰好变成一个正方形，这个正方形的边长是多少？

(2) 三个连续整数两两相乘，再求和，结果为 242 ，这三个数分别是多少？

2. 把下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项。

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$3x^2 = 5x - 1$				
$(x+2)(x-1) = 6$				
$4 - 7x^2 = 0$				

3. 一个面积为 120 m^2 的矩形苗圃，它的长比宽多 2 m 。这个苗圃的长和宽各是多少？

4. 有一根长为 16 m 的绳子，你能否用它围出一个面积为 15 m^2 的矩形？若能，矩形的长和宽各是多少？

> 数学理解

5. 如图，一名跳水运动员进行 10 m 跳台跳水训练，在正常情况下，运动员必须在距水面 5 m 以前完成规定的翻腾动作，并且调整好入水姿势，否则就容易出现失误。假设运动员起跳后到水面的距离 h (单位： m) 与运动时间 t (单位： s) 满足关系 $h = 10 + 2.5t - 5t^2$ 。这名运动员最多有多长时间完成规定动作？



(第5题)

问题解决

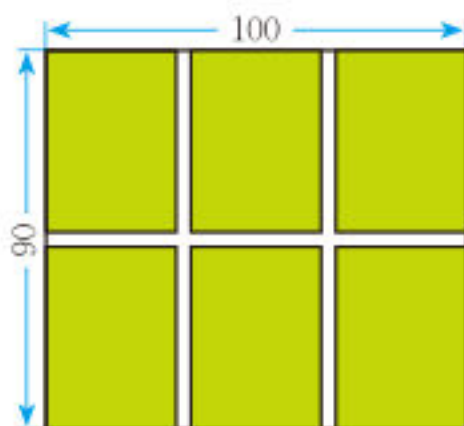
6. 今有户不知高、广，竿不知长、短。横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出。问：户高、广、袤各几何？（选自《九章算术》）

题目大意：一根竹竿横着比门宽 4 尺，竖着比门高 2 尺，斜着与门的对角线恰好相等。门的高、宽，以及对角线的长各是多少？

设门的对角线长为 x ($x > 4$) 尺，请根据题意列出一元二次方程。

7. 如图，要在长 100 m、宽 90 m 的矩形绿地上修建宽度相等的道路，6 块绿地的面积共 $8\,448\text{ m}^2$ ，求道路的宽。

设道路的宽为 $x\text{ m}$ ，请根据题意列出一元二次方程。



（第 7 题）

8. 查阅资料，了解一元二次方程的发展历史，写一篇小短文。

2

一元二次方程的解法

在上一节的梯子滑动问题中, 梯子底端滑动的距离 x (单位: m) 满足方程

$$x^2 + 12x - 15 = 0.$$

我们已经求出了 x 的近似值, 你能设法求出它的精确值吗?

思考·交流

(1) 你能解哪些特殊的一元二次方程?

(2) 你会解下列一元二次方程吗? 你是怎么做的? 你总结出怎样的经验?

$$x^2 = 5, 2x^2 + 3 = 5, x^2 + 2x + 1 = 5.$$

(3) 你能解方程 $x^2 + 12x - 15 = 0$ 吗? 你遇到的困难是什么? 联想 (2) 中解方程的过程, 能设法将这个方程变成一个你熟悉的形式吗? 与同伴进行交流。

我们可以将方程 $x^2 + 12x - 15 = 0$ 转化为

$$(x+6)^2 = 51.$$

两边开平方, 得

$$x+6 = \pm\sqrt{51}.$$

因此我们说方程 $x^2 + 12x - 15 = 0$ 有两个根

$$x_1 = \sqrt{51} - 6, x_2 = -\sqrt{51} - 6.$$

这里, 解一元二次方程的思路是将方程转化为 $(x+m)^2 = n$ 的形式, 它的一边是一个完全平方式, 另一边是一个常数。当 $n \geq 0$ 时, 两边同时开平方, 转化为一元一次方程, 便可求出原一元二次方程的根。

x_1, x_2 都符合原问题的要求吗?

操作·思考

(1) 填上适当的数, 使下列等式成立:

$$x^2 + 12x + \underline{\hspace{2cm}} = (x+6)^2;$$

$$x^2 - 4x + \underline{\hspace{2cm}} = (x - \underline{\hspace{2cm}})^2;$$

$$x^2 + 8x + \underline{\hspace{2cm}} = (x + \underline{\hspace{2cm}})^2.$$

(2) 观察(1)中三个等式的左右两边, 你觉得常数项和一次项系数有什么关系呢?

例1 解方程: $x^2 + 8x - 9 = 0$ 。

解: 可以把常数项移到方程的右边, 得

$$x^2 + 8x = 9。$$

两边都加一次项系数 8 的一半的平方, 得

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 9 + \left(\frac{8}{2}\right)^2,$$

即

$$(x + 4)^2 = 25。$$

两边开平方, 得

$$x + 4 = \pm 5,$$

即

$$x + 4 = 5, \text{ 或 } x + 4 = -5。$$

所以

$$x_1 = 1, x_2 = -9。$$

在例 1 中, 我们通过配成完全平方式的方法得到了一元二次方程的根, 这种解一元二次方程的方法称为**配方法** (solving by completing the square)。

随堂练习

1. 解方程:

$$(1) x^2 - 10x + 25 = 7;$$

$$(2) x^2 - 14x = 8;$$

$$(3) x^2 + 3x = 1;$$

$$(4) x^2 + 2x + 2 = 8x + 4。$$

例2 解方程: $3x^2 + 8x - 3 = 0$ 。

解: 两边都除以 3, 得

$$x^2 + \frac{8}{3}x - 1 = 0。$$

可以先将二次项系数化为 1。

配方, 得

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \left(\frac{1}{2} \times \frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{8}{3}\right)^2 - 1 = 0,$$

即

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} = 0.$$

移项, 得

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}.$$

两边开平方, 得

$$x + \frac{4}{3} = \pm \frac{5}{3},$$

即

$$x + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}, \text{ 或 } x + \frac{4}{3} = -\frac{5}{3}.$$

所以

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -3.$$

思考·交流

(1) 一个小球从地面以 15 m/s 的初速度竖直向上弹出, 它在空中运动的高度 h (单位: m) 与运动的时间 t (单位: s) 满足关系:

$$h = 15t - 5t^2.$$

小球何时能达到 10 m 高? 你是怎么解决这个问题的?

(2) 你认为用配方法解一元二次方程时, 要注意哪些方面? 与同伴进行交流。

随堂练习

1. 解方程:

(1) $3x^2 - 9x + 2 = 0;$

(2) $2x^2 + 6 = 7x;$

(3) $4x^2 - 8x - 3 = 0.$

阅读·思考

一元二次方程的几何解法

你知道吗，对于一元二次方程，我国及其他一些国家的古代数学家还研究过其几何解法呢！

下面以方程 $x^2 + 2x - 35 = 0$ 即 $x(x+2) = 35$ 为例加以说明。

我国汉末三国初数学家、天文学家赵爽在研究《周髀》时给出了一元二次方程的图解方法，用这种方法可以解上述方程：构造图 2-3，一方面，图中大正方形的面积是 $(x+x+2)^2$ ；另一方面，它又等于四个矩形的面积与中间小正方形的面积的和，即 $4 \times 35 + 2^2$ 。据此易得 $x=5$ 。

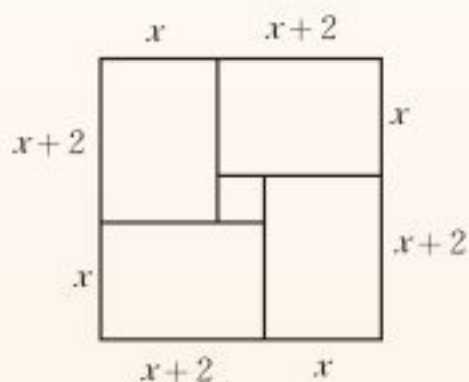


图 2-3

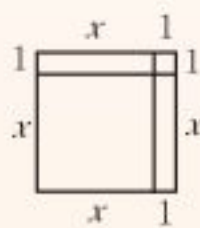


图 2-4

9 世纪，阿拉伯数学家花刺子米采用的方法是：构造图 2-4，一方面，大正方形的面积为 $(x+1)^2$ ；另一方面，它又等于 $35+1$ 。据此同样可得 $x=5$ 。

想一想，图 2-3 与图 2-4 有什么区别与联系？图 2-4 的方法与配方法又有什么联系？这样做，只得到了方程的一个根，为什么？

我们发现，利用配方法解一元二次方程的基本步骤是相同的。因此，如果能用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，得到根的一般表达式，那么在解具体的一元二次方程时，就会方便简捷得多。

你能用配方法解方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 吗？请你试一试，并与同伴进行交流。

事实上，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，因为二次项系数 $a \neq 0$ ，所以方程两边都除以 a ，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0。$$

配方，得

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0。 \end{aligned}$$

移项，得

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}。$$

因为 $a \neq 0$ ，所以 $4a^2 > 0$ 。当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时， $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 是一个非负数，此时两边开平方，得

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \\ \text{即 } x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。 \end{aligned}$$

这就是说，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，它的根是

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

上面这个式子称为一元二次方程的求根公式。用求根公式解一元二次方程的方法称为**公式法**（solving by formula）。

例3 解方程:

(1) $x^2 - 7x - 18 = 0$; (2) $4x^2 + 1 = 4x$ 。

解: (1) 这里 $a=1$, $b=-7$, $c=-18$ 。因为 $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 121 > 0$,

所以 $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2 \times 1} = \frac{7 \pm 11}{2}$,

即 $x_1 = 9$, $x_2 = -2$ 。

(2) 将原方程化成一般形式, 得

$$4x^2 - 4x + 1 = 0。$$

这里 $a=4$, $b=-4$, $c=1$ 。因为 $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$,

所以 $x = \frac{-(-4) \pm 0}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$,

即 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ 。**尝试·思考**(1) 你能解一元二次方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 吗? 你是怎么想的?(2) 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 它的根的情况是怎样的?

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$,
 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根;
 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根;
 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根。

由此可知, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的情况可由 $b^2 - 4ac$ 来判定。我们把 $b^2 - 4ac$ 叫作一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的判别式, 通常用希腊字母“ Δ ”^❶来表示。

^❶ 希腊字母“ Δ ”读作 delta。

思考·交流

在求解一元二次方程的过程中,你认为配方的作用是什么?与同伴进行交流。

随堂练习

1. 不解方程,判断下列方程的根的情况:

(1) $2x^2 + 5 = 7x$;

(2) $4x(x-1) + 3 = 0$;

(3) $4(y^2 + 0.09) = 2.4y$ 。

2. 用公式法解方程:

(1) $2x^2 - 9x + 8 = 0$;

(2) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;

(3) $16x^2 + 8x = 3$;

(4) $x(x-3) + 5 = 0$ 。

3. 一个直角三角形三条边的长为三个连续偶数,求这个三角形三条边的长。

一个小球从地面以 15 m/s 的初速度竖直向上弹出,它在空中运动的高度 h (单位: m) 与运动的时间 t (单位: s) 满足关系: $h = 15t - 5t^2$ 。小球从弹出到落回地面,经过了几秒?

设小球经过 $t \text{ s}$ 落回地面,此时 $h = 0$,于是可得方程 $15t - 5t^2 = 0$ 。

小颖、小明、小亮都求出了这个方程的解,但他们的解法各不相同。



由方程 $15t - 5t^2 = 0$,
得 $5t^2 - 15t = 0$ 。

因此 $t = \frac{15 \pm \sqrt{225}}{10}$,
所以 $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ 。

由方程 $15t - 5t^2 = 0$,
得 $5t^2 = 15t$ 。

两边都约去 $5t$,
得 $t = 3$ 。





由方程 $15t - 5t^2 = 0$,
得 $5t^2 - 15t = 0$,
即 $5t(t - 3) = 0$.
于是 $t = 0$, 或 $t - 3 = 0$.
所以 $t_1 = 0$, $t_2 = 3$.

分析上面的求解过程, 他们分别运用了怎样的方法? 他们的结果正确吗? 与同伴进行交流。

当一元二次方程的一边为 0, 而另一边能够分解成两个一次因式的乘积时, 我们就可以用小亮的方法求解。这种解一元二次方程的方法称为**因式分解法** (solving by factorization)。

例4 解方程:

(1) $5x^2 = 4x$; (2) $x(x - 2) = x - 2$.

解: (1) 原方程可变形为

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4x &= 0, \\ x(5x - 4) &= 0. \\ x &= 0, \text{ 或 } 5x - 4 = 0. \end{aligned}$$

所以

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{5}.$$

(2) 原方程可变形为

$$\begin{aligned} x(x - 2) - (x - 2) &= 0, \\ (x - 2)(x - 1) &= 0. \\ x - 2 &= 0, \text{ 或 } x - 1 = 0. \end{aligned}$$

所以

$$x_1 = 2, x_2 = 1.$$

原来的一元二次方程转化成了两个一元一次方程。

操作 · 思考

- (1) 解方程: $x^2 - 4 = 0$, $(x + 1)^2 - 25 = 0$, $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x^2 + 6x - 8 = 0$.
(2) 你用了哪些方法求解 (1) 中的方程?

回顾·反思

回顾一元二次方程的各种解法，你对它们的共性及各自的特点有什么理解？

随堂练习

1. 用因式分解法解方程：

$$(1) (x+2)(x-4)=0;$$

$$(2) 4x(2x+1)=3(2x+1)。$$

2. 一个数平方的2倍等于这个数的7倍，求这个数。



习题2.2

> 知识技能

1. 用配方法解方程：

$$(1) x^2 + 12x + 25 = 0;$$

$$(2) x^2 + 4x = 10;$$

$$(3) x^2 - 6x = 11;$$

$$(4) x^2 - 9x + 19 = 0;$$

$$(5) 6x^2 - 7x + 1 = 0;$$

$$(6) 5x^2 - 18 = 9x;$$

$$(7) 4x^2 - 3x = 52;$$

$$(8) 5x^2 = 4 - 2x。$$

2. 用公式法解方程：

$$(1) 2x^2 - 4x - 1 = 0;$$

$$(2) 5x + 2 = 3x^2;$$

$$(3) (x-2)(3x-5)=1;$$

$$(4) 0.2x^2 + 5 = \frac{3}{2}x。$$

3. 用因式分解法解方程：

$$(1) (4x-1)(5x+7)=0;$$

$$(2) x(x+2)=3x+6;$$

$$(3) (2x+3)^2=4(2x+3);$$

$$(4) 2(x-3)^2=x^2-9。$$

4. 解方程：

$$(1) 5(x^2-x)=3(x^2+x);$$

$$(2) (x-2)^2=(2x+3)^2;$$

$$(3) (x-2)(x-3)=12;$$

$$(4) 2x+6=(x+3)^2;$$

$$(5) 2y^2+4y=y+2。$$

5. 不解方程, 判断下列方程的根的情况:

(1) $5x^2 + x = 7$;

(2) $25x^2 + 20x + 4 = 0$;

(3) $(x+1)(4x+1) = 2x$.

6. 写一个一元二次方程, 并判断这个方程的根的情况。

问题解决

7. 如图, 在一块长 35 m、宽 26 m 的矩形地面上, 修建宽度相等的两条互相垂直的道路 (两条道路分别与矩形的一条边平行), 剩余部分栽种花草, 要使剩余部分的面积为 850 m^2 , 道路的宽度应为多少?

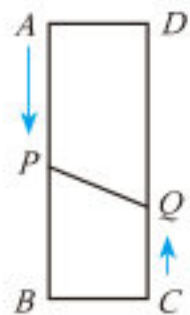


(第7题)

8. 游行队伍有 8 行 12 列, 后又增加了 69 人, 使得队伍增加的行、列数相同, 你知道增加了多少行或多少列吗?

9. 印度古算书中有这样一首诗: “一群猴子分两队, 高高兴兴在游戏。八分之一再平方, 蹦蹦跳跳树林里; 其余十二叽喳喳, 伶俐活泼又调皮。告我总数共多少, 两队猴子在一起。” 请你解决这个问题。

※10. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 16 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ 。动点 P 从点 A 出发沿 AB 方向以 3 cm/s 的速度运动, 动点 Q 同时从点 C 出发沿 CD 方向以 2 cm/s 的速度运动。当其中一点到达终点时, 另一点也随之停止运动。



(第10题)

(1) 这两个动点出发后经过多长时间它们之间的距离是 10 cm ?

(2) 请根据题目情境提出一个新问题, 并加以解决。

11. 今有户高多于广六尺八寸, 两隅相去适一丈^❶。问: 户高、广各几何? (选自《九章算术》)

题目大意: 已知矩形门的高比宽多 6 尺 8 寸, 门的对角线长 1 丈, 门的高和宽各是多少?

12. 在一幅长 90 cm 、宽 40 cm 的矩形风景画的四周外围镶上一条宽度相等的金色纸边, 制成一幅挂图, 如果要求风景画的面积占整个挂图面积的 72% , 那么金色纸边的宽度应该是多少?

❶ “尺”“寸”“丈”都是我国传统长度单位, 其中 $1 \text{ 丈} = 10 \text{ 尺}$, $1 \text{ 尺} = 10 \text{ 寸}$ 。

13. 某农场要建一个矩形鸡舍, 鸡舍的一边靠墙 (墙长 25 m), 另三边用木栏围成, 木栏长 40 m。

(1) 鸡舍的面积能达到 180 m^2 吗? 能达到 200 m^2 吗?

(2) 鸡舍的面积能达到 250 m^2 吗?

如果能, 请你给出设计方案; 如果不能, 请说明理由。

14. 如图, 圆柱的高为 15 cm, 全面积 (也称表面积) 为 $200\pi \text{ cm}^2$, 那么该圆柱的底面半径为多少?

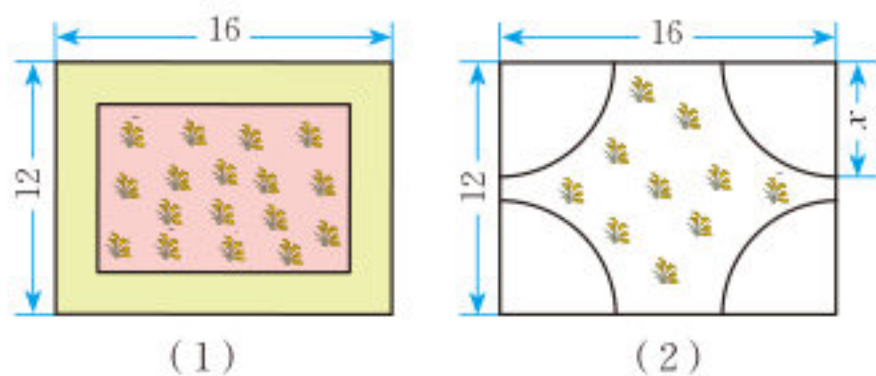


(第 14 题)

15. 在一块长 16 m、宽 12 m 的矩形荒地上, 要建造一个花园, 并使花园所占面积为荒地面积的一半。你能给出设计方案吗?

(1) 小明的设计方案如图 (1) 所示, 其中花园四周小路的宽度都相等, 求小路的宽度;

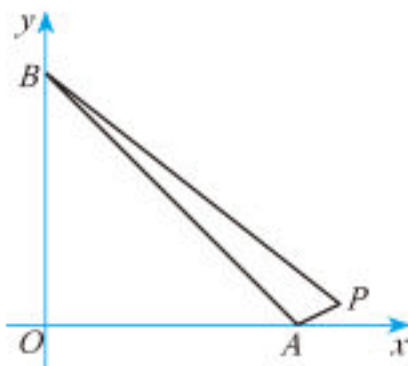
(2) 小亮的设计方案如图 (2) 所示, 其中花园每个角上的扇形都相同, 求图 (2) 中的 x (单位: m)。



(第 15 题)

> 联系拓广

- ※16. 如图, 以点 $P(14, 1)$, $A(a, 0)$, $B(0, a)$ ($0 < a < 14$) 为顶点的 $\triangle PAB$ 的面积为 18, 求 a 的值。如果 $a > 14$ 呢?



(第 16 题)

3

一元二次方程的根与系数的关系

如果 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$, x_1, x_2 是实数), 那么一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有两个实数根 $x = x_1, x = x_2$ 。反过来, 如果 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根, 那么 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 一定成立吗?

(1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个根为 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$, 那么 $2x^2 - 3x + 1$ 与 $2(x - \frac{1}{2})(x - 1)$ 相等吗? 换几个一元二次方程再试一试。

(2) 你认为 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 是否一定成立? 与同伴进行交流。

如果 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根, 那么 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 。

尝试·交流

根据上面的结论, 你能发现一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的系数与它的两个根 x_1, x_2 之间有怎样的关系吗? 与同伴进行交流。

当 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根时, 根据上面的结论有

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)。$$

所以 $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2。$

所以
$$\begin{cases} b = -a(x_1 + x_2), \\ c = ax_1x_2。 \end{cases}$$

于是
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 = \frac{c}{a}。 \end{cases}$$

为什么对应系数相等呢?

由此我们可以得到一元二次方程的根与系数的关系：

如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ，那么

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

例 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

(1) $x^2 + 7x + 6 = 0$; (2) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 。

解：(1) 这里 $a = 1, b = 7, c = 6$ 。

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25 > 0,$$

所以方程有两个实数根。

设方程的两个实数根是 x_1, x_2 ，那么

$$x_1 + x_2 = -7, x_1 x_2 = 6.$$

(2) 这里 $a = 2, b = -3, c = -2$ 。

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0,$$

所以方程有两个实数根。

设方程的两个实数根是 x_1, x_2 ，那么

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_1 x_2 = -1.$$

随堂练习

1. 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

(1) $x^2 - 3x - 1 = 0$; (2) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ 。

2. 小明和小华分别求出了方程 $9x^2 + 6x - 1 = 0$ 的根。

小明： $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$ ；

小华： $x_1 = -3 + 3\sqrt{2}, x_2 = -3 - 3\sqrt{2}$ 。

他们的答案正确吗？说说你的判断方法。

3. 已知方程 $x^2 - \frac{2}{3}x - 7 = 0$ 的一个根是 3，求它的另一个根。



习题2.3

> 知识技能

1. 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

(1) $x(3x-1)-1=0$;

(2) $(2x+5)(x+1)=x+7$ 。

2. 已知一元二次方程 $5x^2+kx-6=0$ 的一个根是 2，求它的另一个根及 k 的值。

> 数学理解

3. 如果一个三角形两边的长分别等于一元二次方程 $x^2-17x+66=0$ 的两个实数根，那么这个三角形的第三边的长可能是 20 吗？为什么？

> 问题解决

4. 查阅资料，了解方程的根与系数的关系的“韦达定理”，以及法国数学家韦达 (François Viète, 1540—1603) 的生平事迹。

> 联系拓广

※5. 把 $4x^2-x-2$ 因式分解。

4

一元二次方程的应用

还记得本章开始时的梯子滑动问题吗？

(1) 在这个问题中（如图 2-5，单位：m），梯子顶端下滑 1 m 时，梯子底端滑动的距离大于 1 m，那么梯子顶端下滑几米时，梯子底端滑动相等的距离呢？

(2) 如果梯子的长度是 13 m，梯子顶端到地面的垂直距离是 12 m，那么梯子顶端下滑的距离与梯子底端滑动的距离可能相等吗？

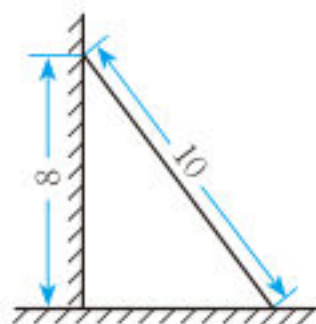


图 2-5

例 1 如图 2-6，某海军基地位于 A 处，在其正南方向 200 n mile 处有一重要目标 B ，在 B 的正东方向 200 n mile 处有一重要目标 C 。小岛 D 位于 AC 的中点，岛上有一补给码头；小岛 F 位于 BC 的中点。一艘军舰从 A 出发，经 B 到 C 匀速巡航，一艘补给船同时从 D 出发，沿南偏西方向匀速直线航行，欲将一批物品送达军舰。

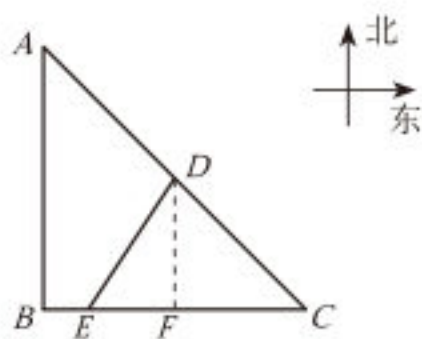


图 2-6

已知军舰的速度是补给船的 2 倍，军舰在由 B 到 C 的途中与补给船相遇于 E 处，那么相遇时补给船航行了多少海里（结果精确到 0.1 n mile）？

解：连接 DF 。

$$\because AD = CD, BF = CF,$$

$\therefore DF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线。

$$\therefore DF \parallel AB, \text{ 且 } DF = \frac{1}{2}AB.$$

$$\because AB \perp BC, AB = BC = 200 \text{ n mile},$$

$$\therefore DF \perp BC, DF = 100 \text{ n mile}, BF = 100 \text{ n mile}.$$

设相遇时补给船航行了 x n mile，那么

$$DE = x \text{ n mile}, AB + BE = 2x \text{ n mile},$$

$$EF = AB + BF - (AB + BE) = (300 - 2x) \text{ n mile}.$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, 根据勾股定理可得方程

$$x^2 = 100^2 + (300 - 2x)^2,$$

整理, 得

$$3x^2 - 1200x + 100\,000 = 0.$$

解这个方程, 得

$$x_1 = 200 - \frac{100\sqrt{6}}{3} \approx 118.4,$$

$$x_2 = 200 + \frac{100\sqrt{6}}{3} \text{ (不合题意, 舍去)}.$$

所以, 相遇时补给船大约航行了 118.4 n mile。

随堂练习

1. 今有二人同所立。甲行率七, 乙行率三。乙东行, 甲南行十步而邪东北与乙会。问: 甲乙行各几何? (选自《九章算术》)

题目大意: 已知甲、乙二人同时从同一地点出发, 甲单位时间内走 7 步, 乙单位时间内走 3 步。乙一直向东走, 甲先向南走 10 步, 后又斜向北偏东方向走了一段后与乙相遇。相遇时, 甲、乙各走了多远? 请你画出示意图, 并解决这个问题。

例2 新华商场销售某种冰箱, 每台进货价为 2 500 元。调查发现, 当销售价为 2 900 元时, 平均每天能售出 8 台; 销售价每降低 50 元, 平均每天就能多售出 4 台。商场要想使这种冰箱平均每天的销售利润达到 5 000 元, 每台冰箱的定价应为多少元?

分析: 这个情境涉及哪些量? 它们之间有怎样的等量关系?

解: 设每台冰箱的销售价降低 x 元, 根据题意, 得

$$(2\,900 - x - 2\,500) \left(8 + 4 \times \frac{x}{50} \right) = 5\,000.$$

解这个方程, 得

$$x_1 = x_2 = 150.$$

$$2\,900 - 150 = 2\,750。$$

所以，每台冰箱的定价应为 2 750 元。

思考·交流

在例 2 中，如果设每台冰箱的定价应为 x 元，那么你能列出怎样的方程？它与例 2 中列出的方程有什么区别和联系？与同伴进行交流。

尝试·思考

某商场将进货价为 30 元的台灯以 40 元售出，平均每月能售出 600 个。调查发现，当这种台灯的售价在 40 元至 60 元范围内时，售价每上涨 1 元，平均每月就少售出 10 个。为了实现平均每月 10 000 元的销售利润，这种台灯的售价应定为多少？这时应购进台灯多少个？

回顾·反思

回顾利用方程解决实际问题的过程，你对其中的关键环节有什么感悟？积累了哪些经验？

随堂练习

1. 某批发市场礼品柜台在春节期间购进大量贺年卡，一种贺年卡平均每天可售出 500 张，每张赢利 0.3 元。为了尽快减少库存，摊主决定采取适当的降价措施。调查发现，这种贺年卡的单价每降低 0.05 元，平均每天就可多售出 200 张。摊主要想平均每天赢利 180 元，这种贺年卡的单价应降低多少元？



习题2.4

> 知识技能

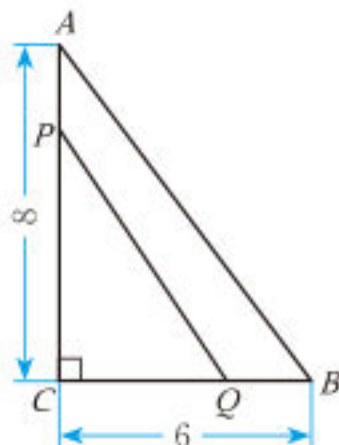
1. 已知一个矩形菜园的周长为 40 m ，面积为 96 m^2 ，求这个菜园的长和宽。
2. 如图，一条水渠的横截面为梯形，已知横截面的面积为 0.78 m^2 ，上口比渠底宽 0.6 m ，渠深比渠底少 0.4 m ，求渠深。



(第2题)

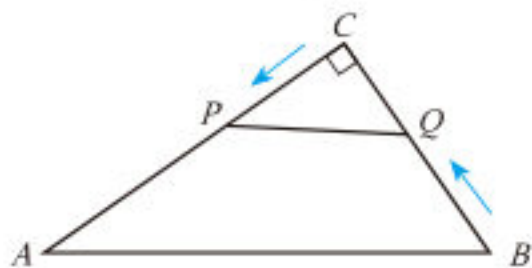
> 问题解决

3. 如图(单位: m)，在 $\triangle ACB$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，动点 P ， Q 同时由 A ， B 两点出发，分别沿 AC ， BC 方向运动，直到到达点 C 为止，它们的运动速度都是 1 m/s 。经过几秒 $\triangle PCQ$ 的面积为 $\triangle ACB$ 面积的一半？



(第3题)

4. 如图，在 $\triangle ACB$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 30\text{ cm}$ ， $BC = 21\text{ cm}$ 。动点 P 从点 C 出发沿 CA 方向运动，动点 Q 同时从点 B 出发沿 BC 方向运动。如果动点 P ， Q 的运动速度均为 1 cm/s ，那么经过几秒它们相距 15 cm ？



(第4题)

5. 某种服装，平均每天可销售 20 件，每件赢利 44 元。在每件降价幅度不超过 10 元的情况下，若每件降价 1 元，则平均每天可多售出 5 件。如果平均每天要赢利 1600 元，那么每件应降价多少元？
6. 某公司以 $64\,000$ 元的成本收购了某种农产品 80 t ，目前可以以 $1\,200$ 元/ t 的价格售出。如果储藏起来，每星期会损失 2 t ，且每星期需支付各种费用 $1\,600$ 元，但同时每星期每吨的价格将上涨 200 元。那么，储藏多少个星期出售这批农产品可获利 $122\,000$ 元？
7. 我国 2022 年并网太阳能发电装机容量约为 4 亿 kW ，经过两年努力，我国 2024 年并网太阳能发电装机容量约为 9 亿 kW ，求我国这两年并网太阳能发电装机容量的年均增长率。
8. 某公司今年 10 月的营业额为 $2\,500$ 万元，按计划第四季度的总营业额要达到 $9\,100$ 万元，求该公司 11 月、 12 月营业额的月均增长率。



回顾与思考

1. 一元二次方程在生活中有哪些应用？请举例说明。
2. 在解决实际问题的过程中，怎样判断求得的结果是否合理？请举例说明。
3. 举例说明解一元二次方程有哪些方法。配方法的一般过程是怎样的？
4. 如何利用一元二次方程根的判别式判断方程根的情况？请举例说明。
5. 一元二次方程的根与系数有什么关系？这种关系有什么作用？请举例说明。
6. 利用方程解决实际问题的关键是什么？
7. 梳理本章内容，用适当的方式呈现全章知识结构，并与同伴进行交流。



复习题

> 知识技能

1. 两个数的差等于4，积等于45，求这两个数。
2. 解方程：

(1) $x(x-14)=0$;	(2) $x^2+12x+27=0$;
(3) $x^2=x+56$;	(4) $x(5x+4)=5x+4$;
(5) $4x^2-45=31x$;	(6) $-3x^2+22x-24=0$;
(7) $(x+8)(x+1)=-12$;	(8) $2(x+3)^2=x(x+3)$;
(9) $x^2-2\sqrt{5}x+2=0$;	(10) $(x+1)^2-3(x+1)+2=0$.
3. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $2x^2+x-1=0$;	(2) $4(x^2-x)=-1$;
--------------------	---------------------

(3) $7x^2 + 2x + 3 = 0$ 。

4. 利用根与系数的关系, 求下列方程的两根之和、两根之积:

(1) $x^2 - 5x - 6 = 0$; (2) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ 。

5. (1) 当 x 取什么值时, 代数式 $x^2 - 13x + 12$ 的值等于 0?

(2) 当 x 取什么值时, 代数式 $x^2 - 13x + 12$ 的值等于 42?

(3) 当 x 取什么值时, 代数式 $x^2 - 13x + 12$ 的值与代数式 $-4x^2 + 18$ 的值相等?

6. 某公司今年第一季度缴税 40 万元, 今年第三季度缴税 48.4 万元。该公司今年第二季度和第三季度缴税的平均增长率是多少?

7. 将一块正方形铁皮的四角各剪去一个边长为 4 cm 的小正方形, 做成一个无盖的长方体形盒子。已知盒子的容积为 400 cm^3 , 求原正方形铁皮的边长。

8. 一块矩形草地的长和宽分别为 20 m 和 15 m, 在它四周外围环绕着宽度相等的小路。已知小路的面积为 246 m^2 , 求小路的宽度。

9. 某剧场共有 1 161 个座位, 已知每排的座位数都相同, 且每排的座位数比总排数少 16, 求每排的座位数。

> 数学理解

10. 将一条长 56 cm 的铁丝剪成两段, 并把每一段铁丝做成一个正方形。

(1) 要使这两个正方形的面积之和等于 100 cm^2 , 该怎么剪?

(2) 这两个正方形的面积之和可能等于 196 cm^2 吗? 可能等于 200 cm^2 吗?

11. 解方程 $(x-1)^2 - 5(x-1) + 4 = 0$ 时, 我们可以将 $x-1$ 看成一个整体, 设 $x-1=y$, 则原方程可化成 $y^2 - 5y + 4 = 0$, 解得 $y_1 = 1$, $y_2 = 4$ 。当 $y = 1$ 时, 即 $x-1 = 1$, 解得 $x = 2$; 当 $y = 4$ 时, 即 $x-1 = 4$, 解得 $x = 5$ 。所以原方程的解为 $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ 。

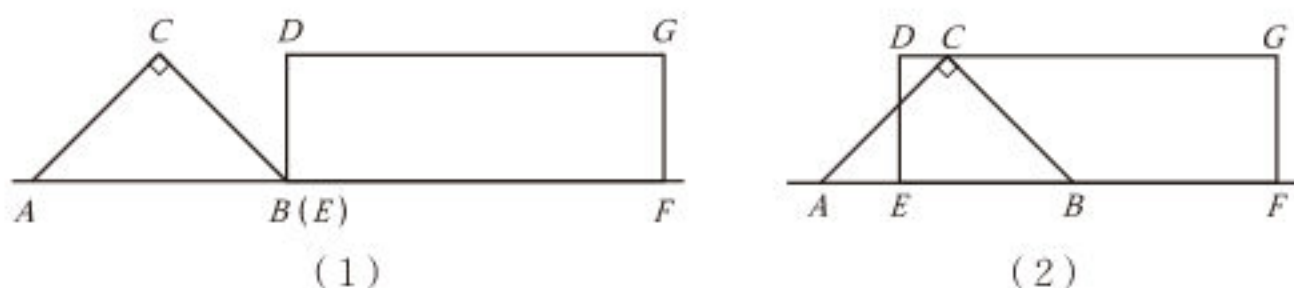
请利用这种方法解方程: $(3x+5)^2 - 4(3x+5) + 3 = 0$ 。

12. 已知 $2 + \sqrt{3}$ 是方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 的一个根, 求这个方程的另一个根及 c 的值。

13. 写出一个一元二次方程, 使它的两个根为 1, -2。

问题解决

14. 如图(1), 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CA = CB$, $AB = 20$ cm; 在矩形 $DEFG$ 中, $EF = 30$ cm, $DE = 10$ cm; $\triangle ABC$ 在矩形 $DEFG$ 的左侧, AB 与 EF 在一条直线上, 且点 B 与点 E 重合。现 $\triangle ABC$ 以 1 cm/s的速度沿直线 AF 从左向右运动(矩形 $DEFG$ 保持不动), 当 $\triangle ABC$ 运动到如图(2)所示的位置时, $\triangle ABC$ 与矩形 $DEFG$ 重叠部分的面积为 68 cm^2 , 此时 $\triangle ABC$ 运动了多少秒?



(第14题)

15. 一列高速列车在启动加速过程中, 行驶的路程 s (单位:m)与时间 t (单位:s)之间的关系为 $s = 10t + \frac{3}{2}t^2$ 。在这一过程中, 该高速列车行驶 800 m需要多长时间?

16. 如图, 在一块长 92 m、宽 60 m的矩形耕地上挖三条水渠(水渠的宽度都相等), 水渠把耕地分成面积均为 885 m^2 的 6 个矩形小块, 水渠的宽度是多少?

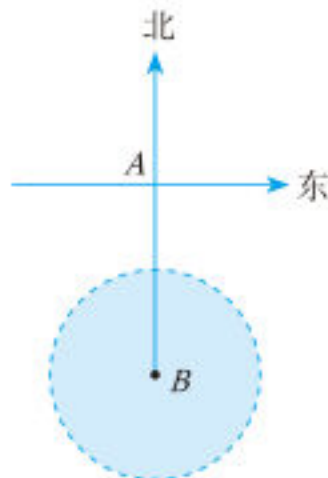


(第16题)

17. 某果园原计划种 100 棵某种果树, 这种果树平均每棵结 1000 个果子, 现准备多种一些这种果树以提高总产量。试验发现, 每多种 1 棵果树, 平均每棵果树的产量就会减少 2 个, 且多种的果树不能超过 100 棵。如果要使总产量增加 15.2% , 那么应多种多少棵这种果树?

18. 一个直角三角形的斜边长 7 cm, 一条直角边比另一条直角边长 1 cm, 求这两条直角边的长度。

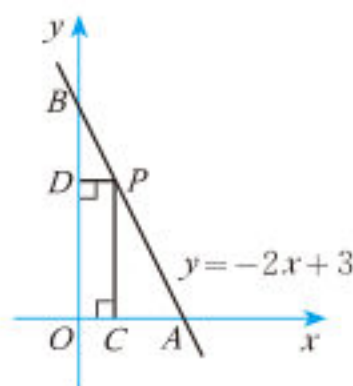
19. 某军舰以 20 kn的速度由西向东航行, 一艘电子侦察船以 30 kn的速度由南向北航行, 它能侦察出周围 50 n mile(包括 50 n mile)范围内的目标。如图所示, 当该军舰航行至 A 处时, 电子侦察船正位于 A 处正南方向的 B 处, 且 $AB = 90$ n mile。如果军舰和侦察



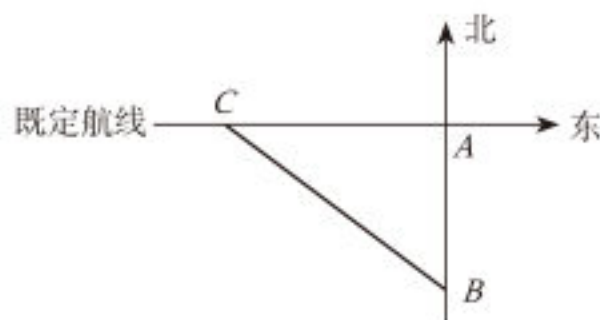
(第19题)

船仍按原速度沿原方向继续航行，那么航行途中侦察船能否侦察到这艘军舰？如果能，最早何时能侦察到？如果不能，请说明理由。

20. 2021 年我国新增高效节水灌溉面积 188 万 hm^2 ，如果要使 2021 年至 2023 年三年新增高效节水灌溉面积总和为 622.28 万 hm^2 ，那么 2022 年、2023 年两年新增高效节水灌溉面积的年均增长率应为多少？
21. 一次会议上，每两个参加会议的人都相互握了一次手，经统计所有人一共握了 66 次手。这次会议参会的人数是多少？
22. 如图，一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象交 x 轴于点 A ，交 y 轴于点 B ，点 P 在线段 AB 上（不与点 A, B 重合），过点 P 分别作 OA 和 OB 的垂线，垂足为 C, D 。点 P 在何处时，矩形 $OCPD$ 的面积等于 1？



(第 22 题)



(第 23 题)

23. 如图，一艘轮船以 30 km/h 的速度沿既定航线由西向东航行，途中接到台风警报，某台风中心正以 20 km/h 的速度由南向北移动，距台风中心 200 km 的圆形区域（包括边界）都属台风影响区。当这艘轮船接到台风警报时，它到台风中心的距离 $CB = 500$ km，此时台风中心到轮船既定航线的最近距离 $BA = 300$ km。如果这艘轮船不改变航向，那么它会不会进入台风影响区？如果会，从接到警报开始，经过多长时间它就会进入台风影响区（结果精确到 0.1 h）？

联系拓广

24. 我们已经学习了一元一次方程、一元二次方程、二元一次方程组、分式方程，你对它们之间的联系与区别有怎样的认识？请画图或撰写小短文分享你的认识。

第三章

图形的相似

色彩斑斓的世界中有许多形状相同的图形。你知道这些形状相同的图形有怎样的性质吗？我们常常会根据需要将一张图片放大或缩小，你知道如何按比例进行操作吗？

本章将借鉴学习全等图形的经验研究图形的相似，探索三角形相似的条件，了解相似三角形的性质，并利用图形的相似解决一些简单的实际问题。在这一过程中，你将进一步积累研究图形性质的经验，形成有逻辑地表达与交流的习惯，发展几何直观、推理能力等。



在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：



- 💡 为什么要研究图形的相似关系？数学中是如何刻画“形状相同”的？
- 💡 本章是如何研究相似三角形的？经历了这一研究过程，你有怎样的体会和感悟？

1

相似多边形

在实际生活中，我们经常会看到许多形状相同的图形。

你能在图 3-1 中找出形状相同的图形吗？这些形状相同的图形有什么不同？

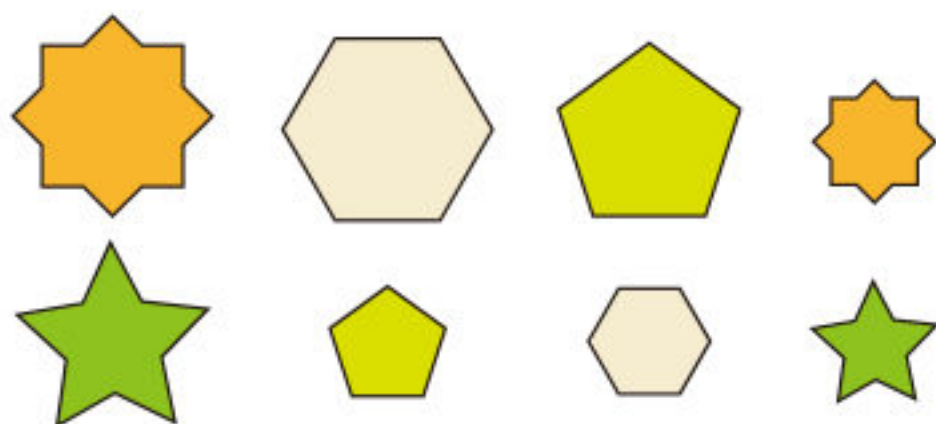


图 3-1

形状相同而大小不同的两个平面图形，较大的图形可以看成是由较小的图形“放大”得到的，较小的图形可以看成是由较大的图形“缩小”得到的。在这个过程中，两个图形上的相应线段也被“放大”或“缩小”。因此，对于形状相同而大小不同的两个图形，我们可以用相应线段长度的比来描述它们的大小关系。

如果选用同一个长度单位量得两条线段 AB , CD 的长度分别是 m , n ，那么这两条线段的比（ratio）就是它们长度的比，即 $AB:CD = m:n$ ，或写成 $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ 。其中，线段 AB , CD 分别叫作这个线段比的前项和后项。如果把 $\frac{m}{n}$ 表示成比值 k ，那么 $\frac{AB}{CD} = k$ ，或 $AB = k \cdot CD$ 。两条线段的比实际上就是两个数的比。

如图 3-2，五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 形状相同， $AB = 5\text{ cm}$ ， $A'B' = 3\text{ cm}$ ， $AB:A'B' = 5:3$ ， $\frac{5}{3}$ 就是线段 AB 与线段 $A'B'$ 的比，这个比值刻画了这两个五边形的大小关系。

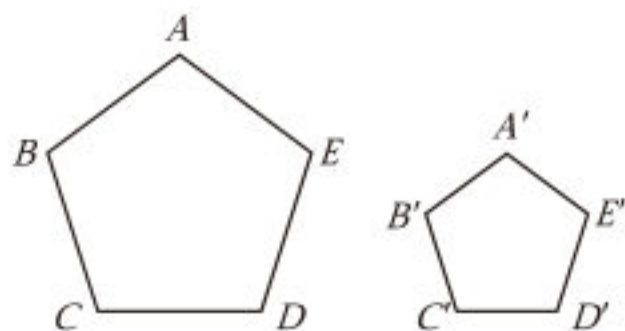


图 3-2

操作·思考

如图 3-3, 已知方格纸中每个小方格的边长均为 1, 五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 的顶点都在格点上^❶。

(1) AB , BC , $A'B'$, $B'C'$ 的长度分别是多少?

(2) 分别计算 $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, $\frac{AB}{BC}$, $\frac{A'B'}{B'C'}$ 的值, 你发现了什么?

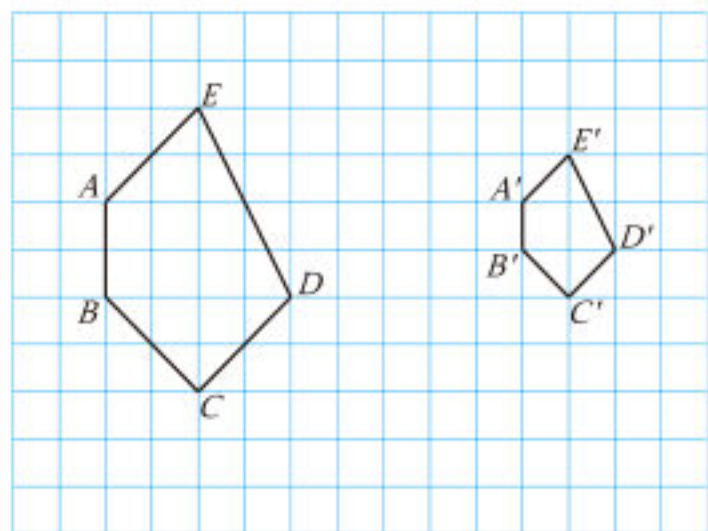


图 3-3

在四条线段 a , b , c , d 中, 如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比, 即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么这四条线段 a , b , c , d 叫作成比例的线段, 简称比例线段 (proportional segments)。在图 3-3 中, AB , $A'B'$, BC , $B'C'$ 是成比例的线段, AB , BC , $A'B'$, $B'C'$ 也是成比例的线段。

思考·交流

如果 a , b , c , d 四个数成比例, 即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么 $ad = bc$ 吗? 反过来, 如果 $ad = bc$, 那么 a , b , c , d 四个数成比例吗? 与同伴进行交流。

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么 $ad = bc$ 。

如果 $ad = bc$ (a , b , c , d 都不等于 0), 那么 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

观察·思考

观察图 3-3, 你认为五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 的形状相同吗?

(1) 在这两个五边形中, 是否有对应相等的内角? 你是怎么知道的?

(2) 在这两个五边形中, 夹相等内角的两边是否成比例?

❶ 本章如无特别说明, 方格纸上图形的顶点都在格点上。

图 3-3 中的五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 是形状相同的多边形, 其中 $\angle A$ 与 $\angle A'$, $\angle B$ 与 $\angle B'$, $\angle C$ 与 $\angle C'$, $\angle D$ 与 $\angle D'$, $\angle E$ 与 $\angle E'$ 分别相等, 称为对应角; AB 与 $A'B'$, BC 与 $B'C'$, CD 与 $C'D'$, DE 与 $D'E'$, EA 与 $E'A'$ 的比都相等, 称为对应边。

各角分别相等、各边成比例的两个多边形叫作相似多边形 (similar polygons)。例如, 在图 3-3 中, 五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 相似, 记作五边形 $ABCDE \sim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$, “ $\sim$ ” 读作 “相似于”。在记两个多边形相似时, 要把表示对应顶点的字母写在对应的位置上。

相似多边形对应边的比叫作相似比 (similarity ratio)。例如, 六边形 $ABCDEF \sim$ 六边形 $A'B'C'D'E'F'$, 对应边的比

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FA}{F'A'} = \frac{4}{5},$$

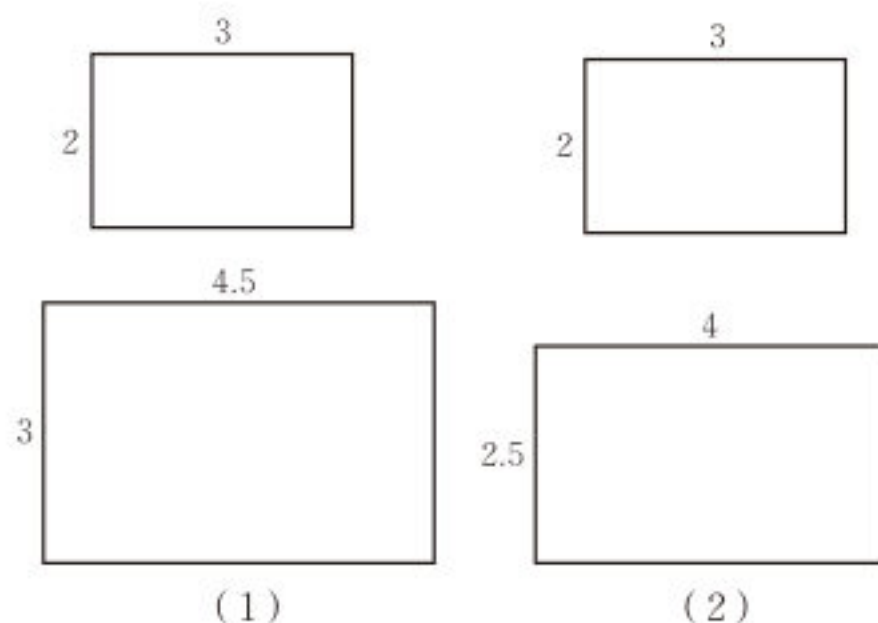
则六边形 $ABCDEF$ 与六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 的相似比 $k_1 = \frac{4}{5}$, 六边形 $A'B'C'D'E'F'$

与六边形 $ABCDEF$ 的相似比 $k_2 = \frac{5}{4}$ 。

两个全等三角形相似吗? 为什么?

随堂练习

1. 你知道地图比例尺的含义吗? 生活中还有哪些利用线段比的事例?
2. a, b, c, d 是成比例的线段, 其中 $a = 3 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$, 求线段 d 的长。
3. 图中每组两个矩形相似吗? 说说你的理由。



(第 3 题)

如图 3-4，一个矩形广场的长为 60 m，宽为 40 m，广场内两条纵向小路的宽度均为 1.5 m，如果设两条横向小路的宽度都为 x m，那么当 x 为多少时，小路内、外边缘所围成的两个矩形相似？

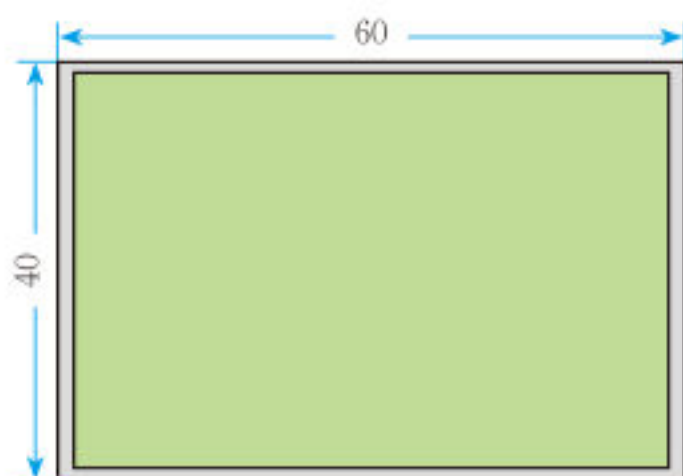


图 3-4

操作·交流

如图 3-5，在矩形 $ABCD$ 与矩形 $EFGH$ 中，已知

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = 2.$$

(1) 这两个矩形相似吗？

(2) 你能求出

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{EF + FG + GH + HE}$$

的值吗？由此你能得出什么结论？
与同伴进行交流。

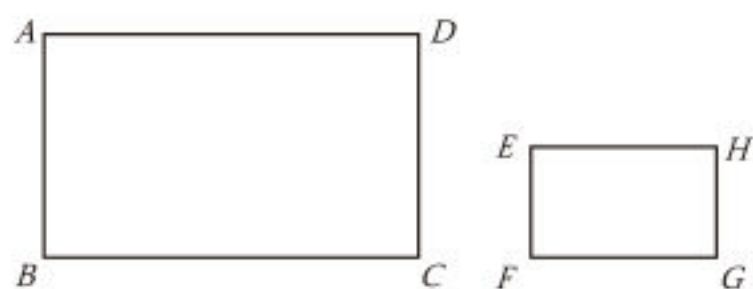


图 3-5

这就是两个矩形的周长比。

尝试·思考

已知 a, b, c, d, e, f 六个数。如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ($b + d + f \neq 0$)，那么 $\frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{a}{b}$ 成立吗？为什么？

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots = \frac{m}{n}$ ($b + d + \cdots + n \neq 0$)，那么 $\frac{a + c + \cdots + m}{b + d + \cdots + n} = \frac{a}{b}$ 。

例 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中，已知 $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{3}{4}$ ，且 $\triangle ABC$ 的周长为 18 cm，求 $\triangle DEF$ 的周长。

解：∵ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore \frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD} = \frac{AB}{DE} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore 4(AB+BC+CA) = 3(DE+EF+FD),$$

$$\text{即 } DE+EF+FD = \frac{4}{3}(AB+BC+CA).$$

$$\because \triangle ABC \text{ 的周长为 } 18 \text{ cm, 即 } AB+BC+CA = 18 \text{ cm,}$$

$$\therefore DE+EF+FD = \frac{4}{3}(AB+BC+CA) = \frac{4}{3} \times 18 = 24 \text{ (cm),}$$

$$\text{即 } \triangle DEF \text{ 的周长为 } 24 \text{ cm.}$$

随堂练习

1. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{3}$ ($b+d \neq 0$), 求 $\frac{a+c}{b+d}$ 的值。

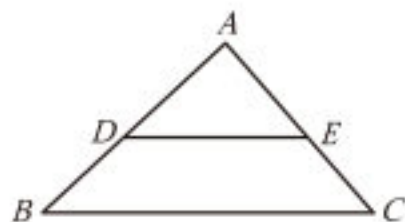


习题3.1

> 知识技能

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是边 AB 和 AC 上的点, $AB=12 \text{ cm}$, $AE=6 \text{ cm}$,

$$EC=5 \text{ cm, 且 } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \text{ 求 } AD \text{ 的长.}$$



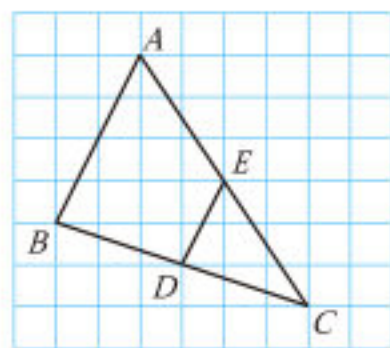
(第1题)



(第2题)

2. 如图, 矩形 $ABCD \sim$ 矩形 $EFGH$, 它们的相似比是 $\frac{2}{3}$, 已知 $AB=3 \text{ cm}$, $BC=5 \text{ cm}$, 求 EF, FG 的长。

3. (1) 任意两个正 n (n 是大于或等于 3 的自然数) 边形相似吗?
 (2) 任意两个菱形相似吗? 为什么?
4. 在菱形 $ABCD$ 与菱形 $EFGH$ 中, $\angle A = \angle E$, 这两个菱形相似吗? 为什么?
5. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3}$ ($b+d+f \neq 0$), 求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ 的值。
6. 如图, 已知方格纸中每个小方格的边长均为 1, 求 AB , ED , BC , DC , AC , EC 的长, 并计算 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDC$ 的周长比。



(第6题)

7. 以正方形 $ABCD$ 各边中点为顶点的四边形 $EFGH$ 是正方形, 求正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的相似比。

> 数学理解

8. 一块长 3 m、宽 1.5 m 的矩形黑板如图所示。
- (1) 如果镶在它外围的木质边框的宽度为 d cm, 那么边框的内、外边缘所围成的矩形相似吗? 为什么?
- (2) 要使边框的内、外边缘所围成的矩形相似, 横向木质边框的宽度与纵向木质边框的宽度之间应满足怎样的关系?



(第8题)

9. 现有大小相同的正方形纸片 30 张, 小亮用其中 3 张拼成一个如图所示的矩形, 小芳也想拼一个与它形状相同但比它大的矩形, 则她至少要用几张正方形纸片 (不得把每张正方形纸片剪开)? 你知道她可能拼出什么样的图形吗? 请你试着画一画。

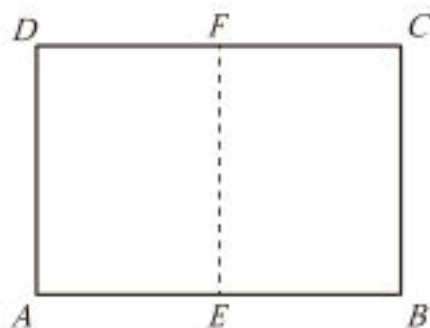


(第 9 题)

10. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ 。你认为这个结论正确吗? 为什么?

> 问题解决

11. 找一张地图, 结合图示中的比例尺, 编制一道数学题。
12. 如果 $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = k$, 那么 k 的值是多少?
13. 如图, 将一张矩形纸片 $ABCD$ 对折 (EF 为折痕), 得到两个形状、大小完全相同的小矩形。原矩形的长边与短边的比为多少时, 小矩形与原矩形是相似的?



(第 13 题)

2

探索三角形相似的条件

根据相似多边形的定义，三角分别相等、三边成比例的两个三角形叫作相似三角形（similar triangles）。

那么，两个三角形至少满足哪些条件就相似呢？能否类比探索三角形全等的条件的思路，寻找判定两个三角形相似的条件呢？

尝试·思考

如果两个三角形只有一个角相等，它们一定相似吗？如果有两个角分别相等呢？

操作·交流

与同伴合作，两个人分别画 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ ，使得 $\angle A$ 和 $\angle A'$ 都等于 $\angle \alpha$ ， $\angle B$ 和 $\angle B'$ 都等于 $\angle \beta$ ，此时， $\angle C$ 与 $\angle C'$ 相等吗？三边的比 $\frac{AB}{A'B'}$ ， $\frac{AC}{A'C'}$ ， $\frac{BC}{B'C'}$ 相等吗？这样的两个三角形相似吗？

改变 $\angle \alpha$ ， $\angle \beta$ 的大小，再试一试，并与同伴进行交流。

定理 两角分别相等的两个三角形相似。^❶

例1 如图 3-6，在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分别是边 AB 和 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$ ， $AB=7$ ， $AD=5$ ， $DE=10$ ，求 BC 的长。

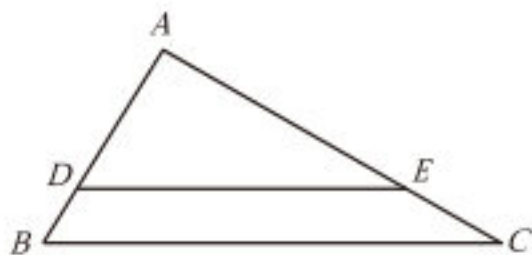


图 3-6

❶ 本节定理的证明见本章第 3 节。

解: $\because DE \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle C$.
 $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (两角分别相等的两个三角形相似).
 $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$.
 $\therefore BC = \frac{AB \cdot DE}{AD} = \frac{7 \times 10}{5} = 14$.

随堂练习

1. 有一个锐角相等的两个直角三角形是否相似? 为什么?
2. 顶角相等的两个等腰三角形是否相似? 为什么?

两个三角形有两边成比例, 它们一定相似吗? 与同伴进行交流。

小明认为, 两边成比例的两个三角形不一定相似。如果再增加一个条件, 你能说出有哪几种可能的情况吗?

我们先来考虑增加一角相等的情况。

相等的角可以是两边的夹角, 也可以是其中一组边的对角。

操作·交流

画 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$, 使 $\angle A = \angle A'$, $\frac{AB}{A'B'}$ 和 $\frac{AC}{A'C'}$ 都等于给定的值 k 。设法比较 $\angle B$ 与 $\angle B'$ (或 $\angle C$ 与 $\angle C'$) 的大小。 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似吗?

改变 k 值的大小, 再试一试, 并与同伴进行交流。

定理 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似。

例2 如图 3-7, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是边 AC 和 AB 上的点, $AE=1.5$, $AC=2$, $BC=3$, 且 $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$, 求 DE 的长。

解: $\because AE=1.5, AC=2$,

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}.$$

$$\because \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

$$\because \angle EAD = \angle CAB,$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (两边成比例且夹角相等的两个三角形相似)。

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}.$$

$$\because BC=3,$$

$$\therefore DE = \frac{3}{4} BC = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}.$$

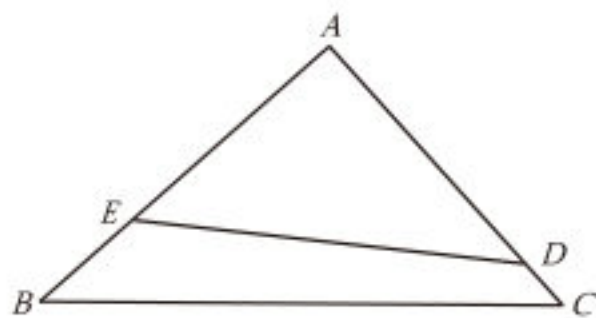


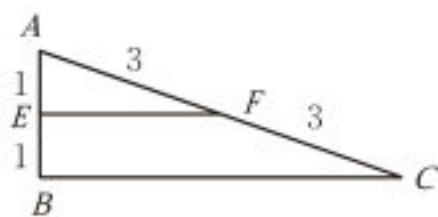
图 3-7

思考·交流

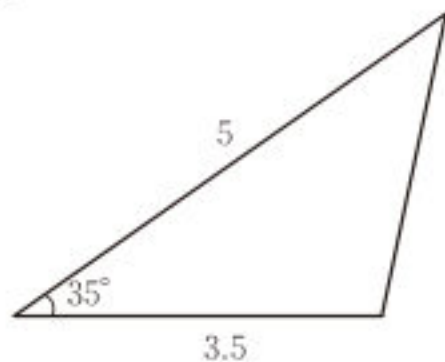
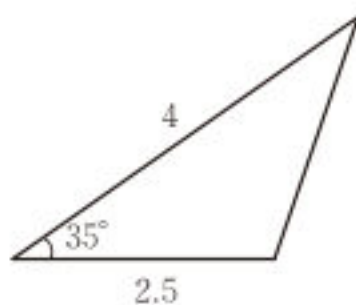
如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 两边成比例, 且其中一组边所对的角相等, 那么这两个三角形一定相似吗? 你能利用全等与相似的关系说明理由吗? 与同伴进行交流。

随堂练习

1. 如图, 每组中的两个三角形是否相似? 为什么?



(1)



(2)

(第1题)

如果两个三角形的三边成比例，那么这两个三角形一定相似吗？

操作·交流

画 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ ，使 $\frac{AB}{A'B'}$ ， $\frac{BC}{B'C'}$ 和 $\frac{AC}{A'C'}$ 都等于给定的值 k 。设法比较 $\angle A$ 与 $\angle A'$ 的大小。 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似吗？说说你的理由。

改变 k 值的大小，再试一试，并与同伴进行交流。

定理 三边成比例的两个三角形相似。

例3 如图 3-8，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$ ， $\angle BAD = 20^\circ$ ，求 $\angle CAE$ 的度数。

解：∵ $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$ ，

∴ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ （三边成比例的两个三角形相似）。

∴ $\angle BAC = \angle DAE$ 。

∴ $\angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$ ，

即 $\angle BAD = \angle CAE$ 。

∵ $\angle BAD = 20^\circ$ ，

∴ $\angle CAE = 20^\circ$ 。

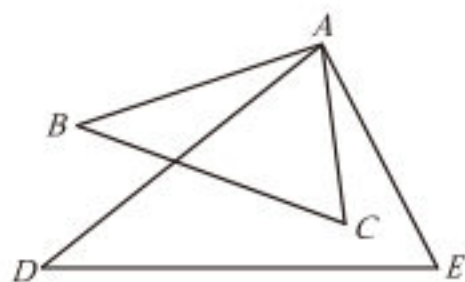


图 3-8

尝试·交流

如图 3-9，已知方格纸中每个小方格的边长均为 1， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似吗？你有哪些判断方法？与同伴进行交流。

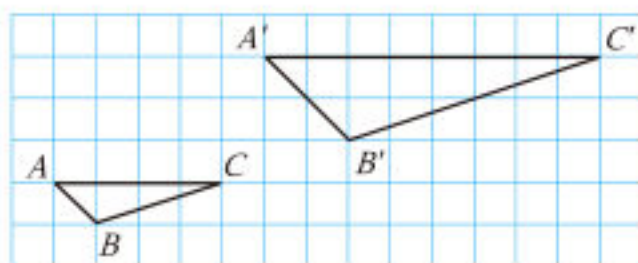
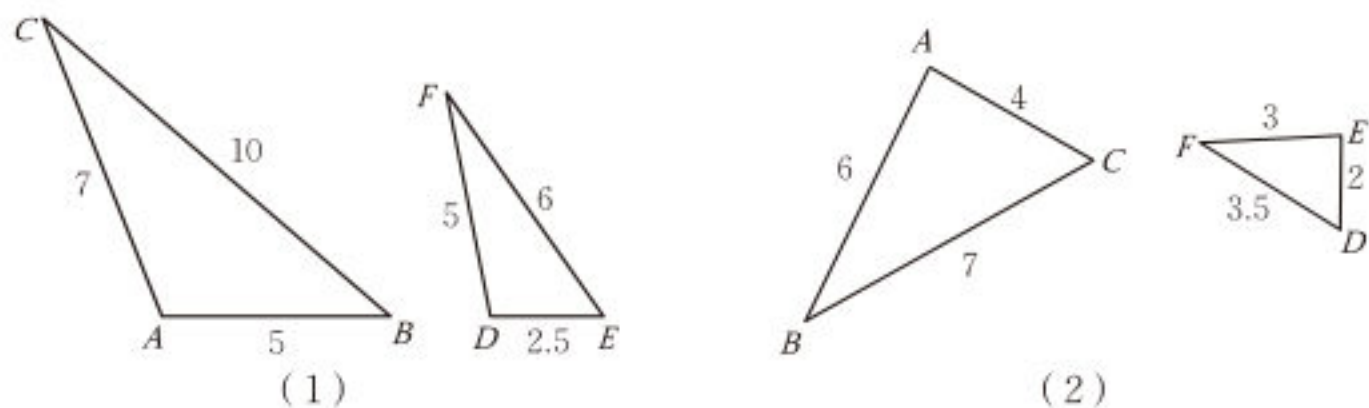


图 3-9

随堂练习

1. 如图, 每组中的两个三角形是否相似? 为什么?



(第1题)

一个五角星如图 3-10 所示。

- (1) 在图中找出相等的角、相等的线段。
- (2) 在图中找出相似比不同的两对相似三角形。

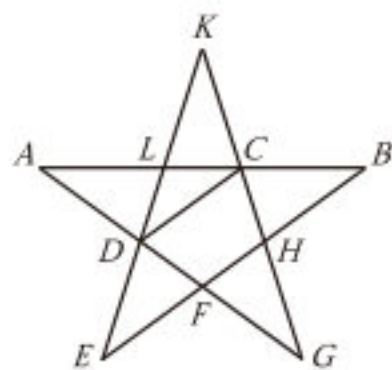


图 3-10

小亮认为, $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$ 。你同意他的看法吗? 说说你的理由。

一般地, 如图 3-11, 点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC , 如果 $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$, 那么称线段 AB 被点 C 黄金分割 (golden section), 点 C 叫作线段 AB 的黄金分割点, AC 与 AB 的比叫作黄金比。



图 3-11

例4 计算黄金比。

解: 由 $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$, 得 $AC^2 = AB \cdot BC$ 。

设 $AB = 1$, $AC = x$, 则 $BC = 1 - x$ 。

$$\therefore x^2 = 1 \times (1 - x),$$

$$\text{即 } x^2 + x - 1 = 0.$$

解这个方程，得

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (不合题意, 舍去).}$$

所以，黄金比 $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ 。

尝试·思考

宽与长的比等于黄金比的矩形称为黄金矩形。如图 3-12，已知矩形 $ABCD$ 为黄金矩形，在边 AB 和边 CD 上分别取点 E, F ，使四边形 $AEFD$ 为正方形。

(1) 矩形 $EBCF$ 是黄金矩形吗？为什么？

(2) 在边 EF 和边 BC 上分别取点 G, H ，使四边形 $EBHG$ 为正方形，那么矩形 $GHCF$ 是黄金矩形吗？

(3) 在这个图中，你还能得到更多的黄金矩形吗？试一试！

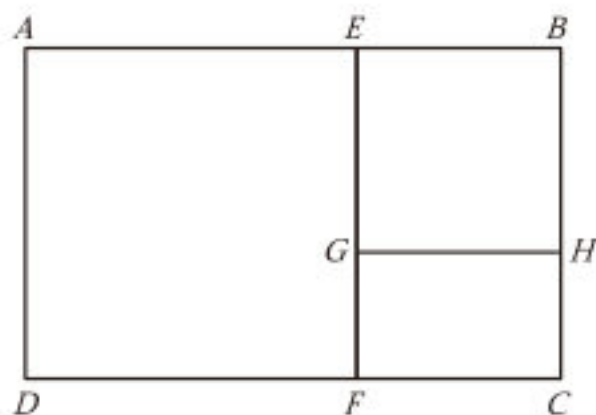
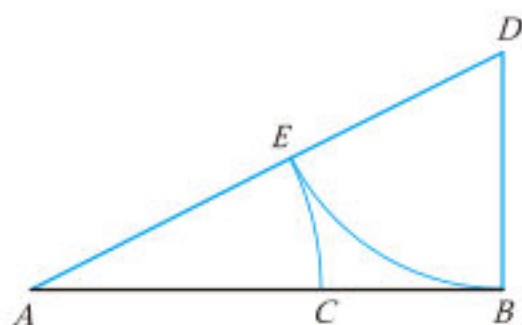


图 3-12

随堂练习

1. 采用如下方法可以得到黄金分割点：

如图，设 AB 是已知线段，过点 B 作 $BD \perp AB$ ，使 $BD = \frac{1}{2} AB$ ；连接 DA ，在 DA 上截取 $DE = DB$ ；在 AB 上截取 $AC = AE$ 。点 C 就是线段 AB 的黄金分割点。请说明其中的道理。



(第1题)

阅读·思考

耐人寻味的 0.618

古希腊数学家、天文学家欧多克索斯 (Eudoxus, 约前400—前347) 曾提出: 能否将一条线段分成不相等的两部分, 使较短线段与较长线段的比等于较长线段与原线段的比? 这就是黄金分割问题, 这个相等的比就是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\ 033\ 988\ 749\ 89\cdots$ 。天文学家开普勒 (Johannes Kepler, 1571—1630) 把这种分割线段的方法称为神圣分割, 并指出, 毕达哥拉斯定理 (勾股定理) 和黄金分割 “是几何中的双宝, 前者好比黄金, 后者堪称珠玉”。19世纪以后, “黄金分割” 的说法逐渐流行起来。

在相当一段时期里, 人们非常推崇黄金分割。比如, 古希腊的许多建筑中, 矩形宽与长的比都近似于黄金比。从古希腊以来, 一直有人认为黄金比在造型艺术中有美学价值。

值得一提的是, 优选法中的 “0.618法” 与黄金分割紧密相关。20世纪70年代, 这种方法经著名数学家华罗庚 (1910—1985) 倡导在我国得到大规模推广, 取得了很大的成果。

用图 3-13 所示的方法也可以作出一条已知线段 AB 的黄金分割点 H :

1. 以线段 AB 为边作正方形 $ABCD$ 。
2. 取 AD 的中点 E , 连接 EB 。
3. 延长 DA 至 F , 使 $EF=EB$ 。
4. 以线段 AF 为边作正方形 $AFGH$ 。

点 H 就是线段 AB 的黄金分割点。

你能说说这种作法的道理吗?

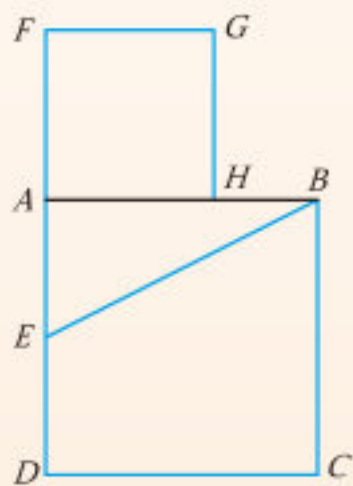


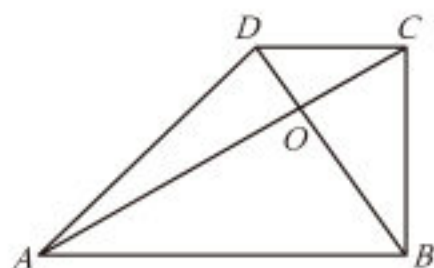
图 3-13



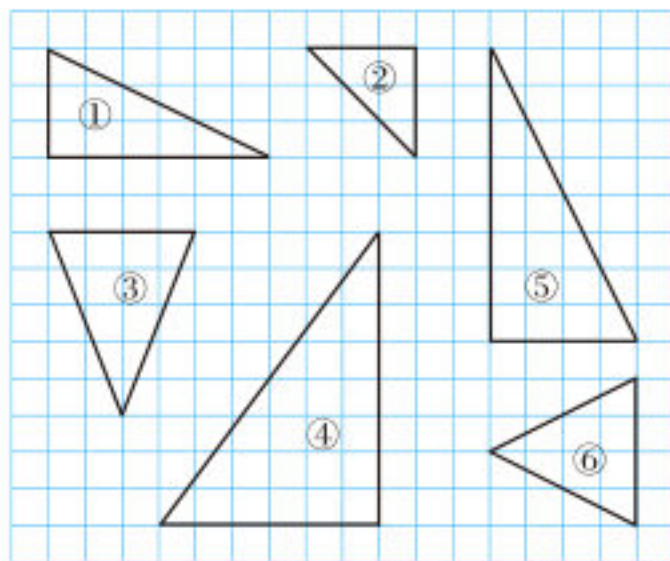
习题3.2

> 知识技能

1. 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中, $\angle A = \angle D = 70^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle E = 50^\circ$, 这两个三角形相似吗? 为什么?
2. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O 。找出图中的相似三角形, 并说明理由。
3. 一个直角三角形两条直角边的长分别为 6 cm, 4 cm, 另一个直角三角形两条直角边的长分别为 9 cm, 6 cm, 这两个直角三角形是否相似? 为什么?
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 39^\circ$, $AB = 1.8$ cm, $BC = 2.4$ cm; 在 $\triangle DEF$ 中, $\angle D = 39^\circ$, $DE = 3.6$ cm, $DF = 2.7$ cm。这两个三角形相似吗? 为什么?
5. 一个三角形三边的长分别为 6 cm, 9 cm, 7.5 cm, 另一个三角形三边的长分别为 8 cm, 10 cm, 12 cm, 这两个三角形相似吗? 为什么?
6. 如图, 方格纸上的 6 个三角形中, 哪些三角形相似? 为什么?



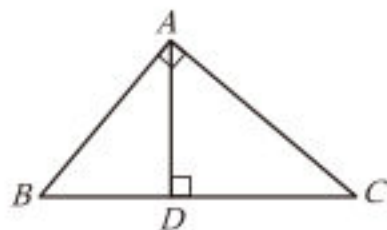
(第2题)



(第6题)

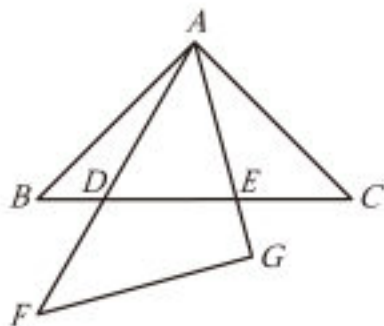
> 数学理解

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$, 垂足为 D 。
 - (1) 请写出图中所有的相似三角形;
 - (2) 以此图为背景编制一道与三角形相似有关的题目, 并与同伴进行交流。

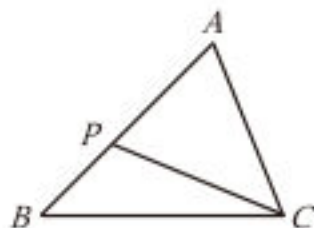


(第7题)

8. 将两个全等的等腰直角三角形摆成如图所示的样子（图中的所有点、线都在同一平面内），请在图中找出两对相似而不全等的三角形，并说明它们相似的理由。

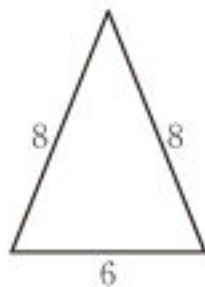


(第8题)



(第9题)

9. 如图， P 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点。
- (1) 如果 $\angle ACP = \angle B$ ，那么 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似？为什么？
 - (2) 如果 $\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB}$ ，那么 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似？为什么？如果 $\frac{AC}{CP} = \frac{BC}{AC}$ 呢？
10. 在一张 8×8 的方格纸上任意连接不在同一条直线上的三个格点，便可画出一个三角形。请用这种方式画出三对两两相似、大小不同的三角形，并指出它们的相似比。
11. 如图，已知一个等腰三角形和一条线段，以这条线段为边画三角形，使之与已知等腰三角形相似。你能画出几个符合要求的大小不等的三角形？



(第11题)



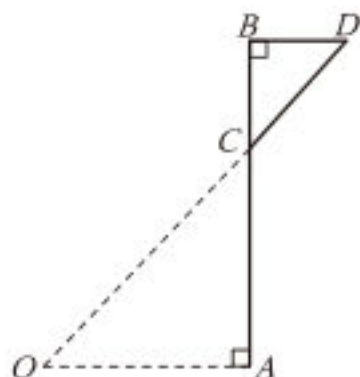
(第12题)

12. 如图，线段 $AB = 80 \text{ cm}$ ，点 C 是靠近点 B 的黄金分割点，点 D 是靠近点 A 的黄金分割点。试确定点 C 到端点 B 的距离以及点 D 到端点 A 的距离。

问题解决

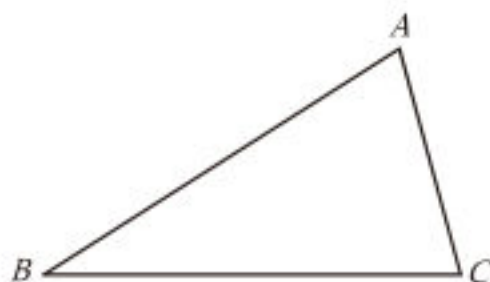
13. 如图，为了测量一个峡谷的宽度，位于峡谷一侧的地质勘探人员先通过观察找到对面岩石上一个特别明显的标志点 O ，再在他们所在的这一侧选

点 A, B, D , 使得 $AB \perp AO$, $BD \perp AB$, 然后确定 DO 和 AB 的交点 C 。测得 $AC = 120 \text{ m}$, $BC = 60 \text{ m}$, $BD = 50 \text{ m}$, 请你帮他们算出峡谷的宽 AO 。

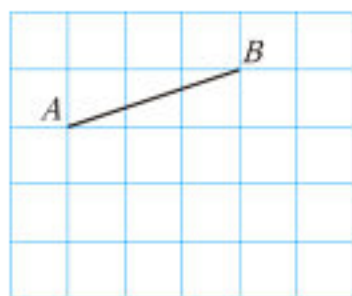


(第13题)

14. 如图, 画一个三角形, 使它与 $\triangle ABC$ 相似, 且相似比为 $\frac{1}{2}$ 。



(第14题)



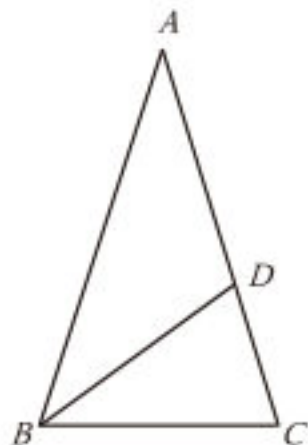
(第15题)

15. 如图, 方格纸中每个小方格的边长均为1, 请用无刻度的直尺在线段 AB 上找到点 C , 使 $AC : CB = 1 : 2$ 。如果要求 $AC : CB = 1 : 3$ 呢? 假如方格纸足够大, 任意两格点连线记为线段 AB , 试用无刻度的直尺在线段 AB 上找到点 C , 使 $AC : CB = 1 : k$ (k 为正整数)。

16. 请用尺规作一个黄金矩形。

17. 通过作黄金分割点, 用尺规作一个如图 3-10 所示的五角星。

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是边 AC 上的一点, 且 $BC = BD = AD$, 这样的 $\triangle ABC$ 称为“锐角黄金三角形”。在一个锐角黄金三角形的三边中, 哪些边的比等于黄金比?



(第18题)

19. 查阅资料, 了解黄金分割在建筑、艺术等领域的应用; 查阅资料, 了解我国著名数学家华罗庚的生平事迹和他倡导的“0.618法”。

3

相似三角形判定定理的证明

(1) 在图 3-14 中, 方格纸中每个小方格的边长均为 1, 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 分别交直线 m, n 于格点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ 。计算 $\frac{A_1A_2}{A_2A_3}$ 与 $\frac{B_1B_2}{B_2B_3}$, $\frac{A_1A_2}{A_1A_3}$ 与 $\frac{B_1B_2}{B_1B_3}$, $\frac{A_2A_3}{A_1A_3}$ 与 $\frac{B_2B_3}{B_1B_3}$ 的值, 你有什么发现?

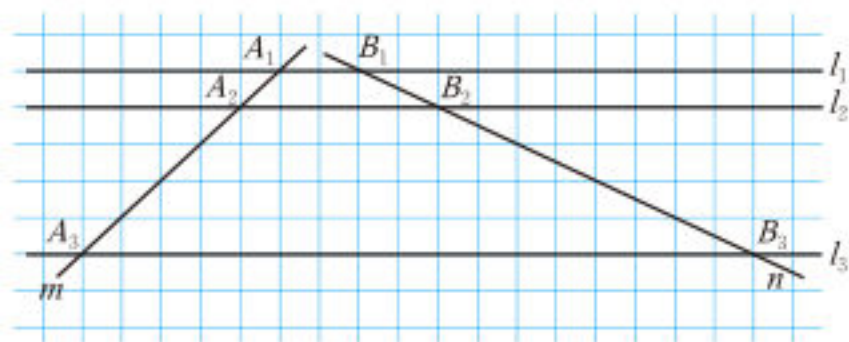


图 3-14

(2) 将图 3-14 中的直线 l_2 向下平移到如图 3-15 所示的位置, 你在 (1) 中发现的结论还成立吗? 如果将直线 l_2 平移到其他位置呢?

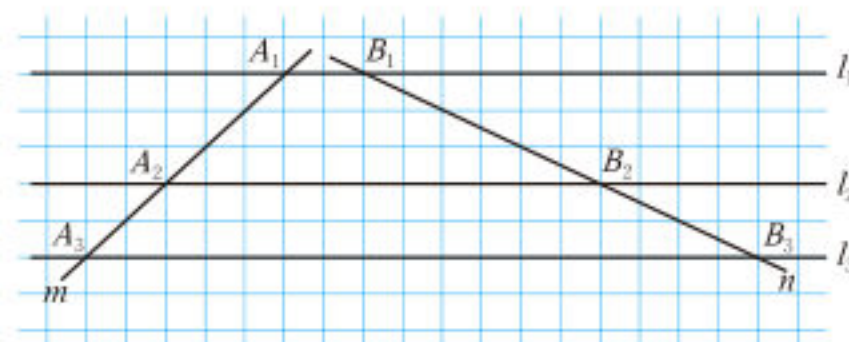


图 3-15

(3) 在平面上任意作三条平行线, 用它们截两条直线, 截得的线段成比例吗?

一般地, 有如下基本事实:

两条直线被一组平行线所截, 所得的对应线段成比例。

观察 · 思考

如图 3-16, 直线 $a \parallel b \parallel c$, 分别交直线 m, n 于点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ 。过点 A_1 作直线 n 的平行线, 分别交直线 b, c 于点 C_2, C_3 (如图 3-17)。图 3-17 中有哪些成比例的线段?

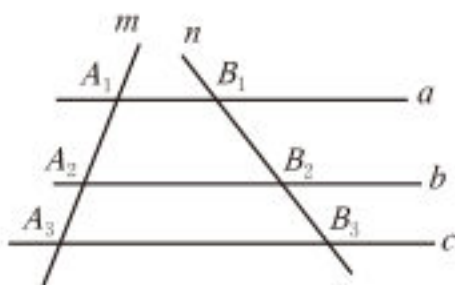


图 3-16

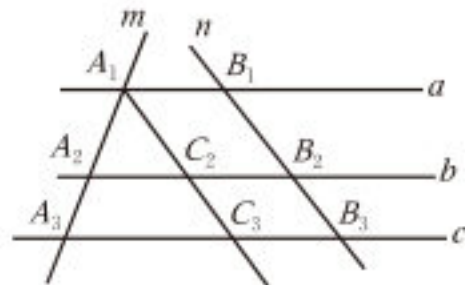


图 3-17

推论 平行于三角形一边的直线与其他两边相交, 截得的对应线段成比例。

例 如图 3-18, 在 $\triangle ABC$ 中, E, F 分别是边 AB 和 AC 上的点, 且 $EF \parallel BC$ 。

(1) 如果 $AE = 7, EB = 5, FC = 4$, 那么 AF 的长是多少?

(2) 如果 $AB = 10, AE = 6, AF = 5$, 那么 FC 的长是多少?

解: (1) $\because EF \parallel BC$,

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ (平行于三角形一边的直线与其他两边相交, 截得的对应线段成比例)。

$$\therefore AF = \frac{AE \cdot FC}{EB} = \frac{7 \times 4}{5} = \frac{28}{5}。$$

(2) $\because EF \parallel BC$,

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ (平行于三角形一边的直线与其他两边相交, 截得的对应线段成比例)。

$$\therefore AC = \frac{AB \cdot AF}{AE} = \frac{10 \times 5}{6} = \frac{25}{3}。$$

$$\therefore FC = AC - AF = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3}。$$

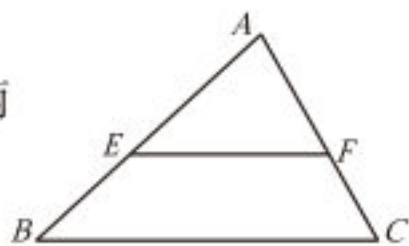
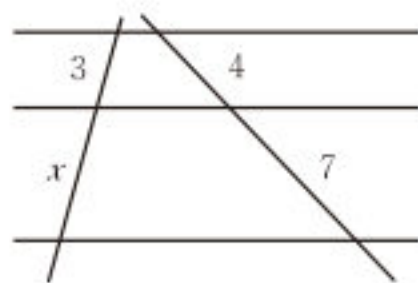


图 3-18

随堂练习

1. 已知两条直线被三条平行线所截，截得线段的长度如图所示，求 x 的值。



(第1题)

①在上一节中，我们通过探索得到了相似三角形的三个判定命题，下面我们对它们进行证明。

(1) 证明：两角分别相等的两个三角形相似。

已知：如图 3-19，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ 。

求证： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

证明：在 $\triangle ABC$ 的边 AB （或它的延长线）上截取 $AD = A'B'$ ，过点 D 作 BC 的平行线，交 AC 于点 E ，则

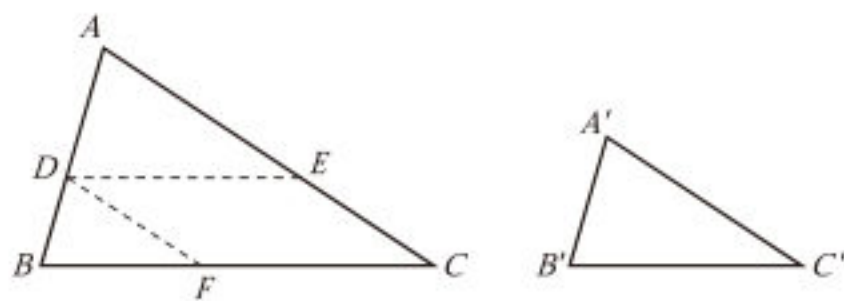


图 3-19

$$\angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle C,$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例}).$$

线段成比例)。

过点 D 作 AC 的平行线，交 BC 于点 F ，则

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CF}{CB} \quad (\text{平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例}).$$

线段成比例)。

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{CF}{CB}.$$

$$\because DE \parallel BC, DF \parallel AC,$$

① 本课时内容是选学内容，不作考试要求。

∴ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形。

∴ $DE = CF$ 。

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}。$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}。$$

而 $\angle ADE = \angle B$, $\angle DAE = \angle BAC$, $\angle AED = \angle C$,

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (相似三角形的定义)。

∴ $\angle A = \angle A'$, $\angle ADE = \angle B = \angle B'$, $AD = A'B'$,

∴ $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ 。

∴ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

(2) 证明: 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似。

已知: 如图 3-20, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A = \angle A'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ 。

求证: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

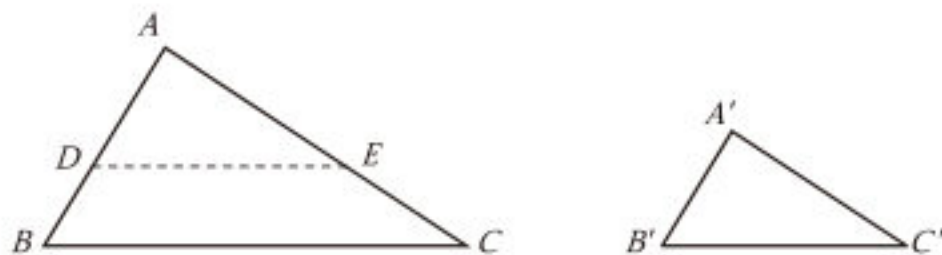


图 3-20

证明: 在 $\triangle ABC$ 的边 AB (或它的延长线) 上截取 $AD = A'B'$, 过点 D 作 BC 的平行线, 交 AC 于点 E , 则

$$\angle B = \angle ADE, \angle C = \angle AED,$$

∴ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (两角分别相等的两个三角形相似)。

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}。$$

$$\because \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, AD = A'B',$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{A'C'}。$$

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'}。$$

$$\therefore AE = A'C'.$$

$$\text{而 } \angle A = \angle A',$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'.$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

(3) 证明：三边成比例的两个三角形相似。

已知：如图 3-21，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ 。

求证： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

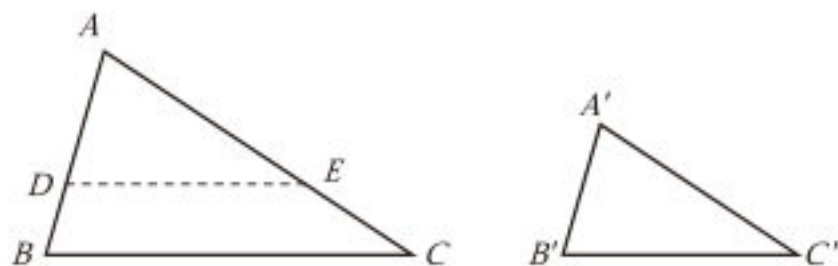


图 3-21

证明：在 $\triangle ABC$ 的边 AB , AC (或它们的延长线) 上分别截取 $AD = A'B'$, $AE = A'C'$, 连接 DE 。

$$\because \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \quad AD = A'B', \quad AE = A'C',$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

$$\text{而 } \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ (两边成比例且夹角相等的两个三角形相似)}.$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}.$$

$$\text{又 } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}, \quad AD = A'B',$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{B'C'}.$$

$$\therefore \frac{BC}{DE} = \frac{BC}{B'C'}.$$

$$\therefore DE = B'C'.$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'.$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

综上，我们证明了相似三角形的三个判定定理。

定理 两角分别相等的两个三角形相似。

定理 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似。

定理 三边成比例的两个三角形相似。

回顾·反思

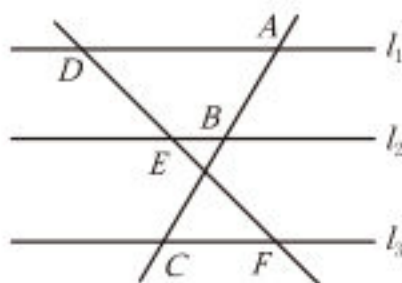
回顾相似三角形判定定理的证明过程，你对几何证明有哪些新的认识？



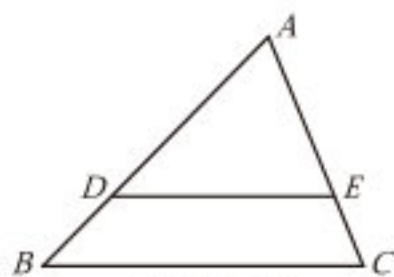
习题3.3

> 知识技能

1. 如图，两条直线被三条平行线所截， $DE=6$ ， $EF=7$ ， $AB=5$ ，求 AC 的长。



(第1题)



(第2题)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别是边 AB 和 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$ 。

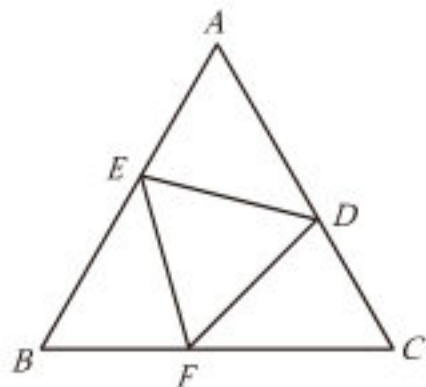
(1) 如果 $AD=3.2$ cm， $DB=1.2$ cm， $AE=2.4$ cm，

那么 EC 的长是多少？

(2) 如果 $AB=5$ cm， $AD=3$ cm， $AC=4$ cm，那

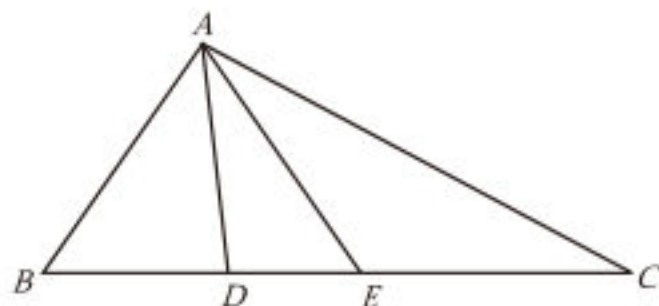
么 EC 的长是多少？

3. 如图，在等边三角形 ABC 中， D ， E ， F 分别是三边上的点， $AE=BF=CD$ ，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似吗？请证明你的结论。

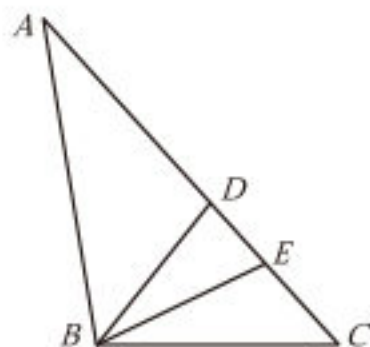


(第3题)

4. 已知：如图， $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{AB} = \frac{AE}{BC}$ 。求证： $AB = AE$ 。



(第4题)

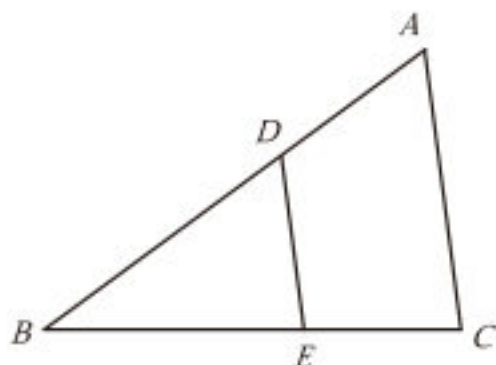


(第5题)

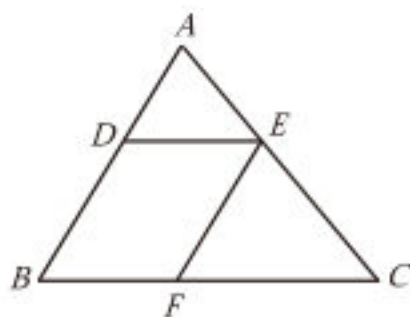
5. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AC 上的一点， $\angle CBD$ 的平分线交 AC 于点 E ，且 $AE = AB$ 。求证： $AE^2 = AD \cdot AC$ 。

问题解决

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分别是边 AB 和 BC 上的点，且 $DE \parallel AC$ ， $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{EC}$ ， $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$ ，求 $\frac{AB}{BD}$ 。

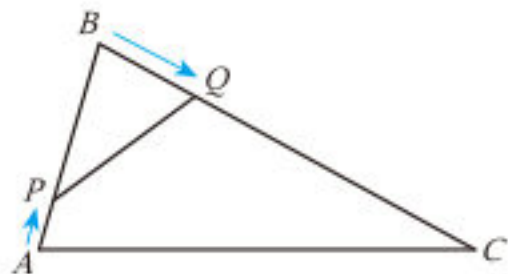


(第6题)



(第7题)

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 上的点，且 $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ， $AD : DB = 2 : 3$ ， $BC = 20$ cm，求 BF 的长。
8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 8$ cm， $BC = 16$ cm，动点 P 从点 A 出发沿 AB 方向以 2 cm/s 的速度运动，动点 Q 同时从点 B 出发沿 BC 方向以 4 cm/s 的速度运动。当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动。那么何时 $\triangle QBP$ 与 $\triangle ABC$ 相似？



(第8题)

4

相似三角形的性质

两个全等三角形的对应高、对应角平分线和对应中线分别相等，那么两个相似三角形的这些对应线段会有怎样的关系呢？

如图 3-22，小王依据图纸上的 $\triangle ABC$ ，以 1:2 的比例建造了模型房的屋架 $\triangle A'B'C'$ ， CD 和 $C'D'$ 分别是它们的立柱。如果 $CD = 1.5 \text{ cm}$ ，那么模型房的屋架立柱有多高？你是怎样想的？

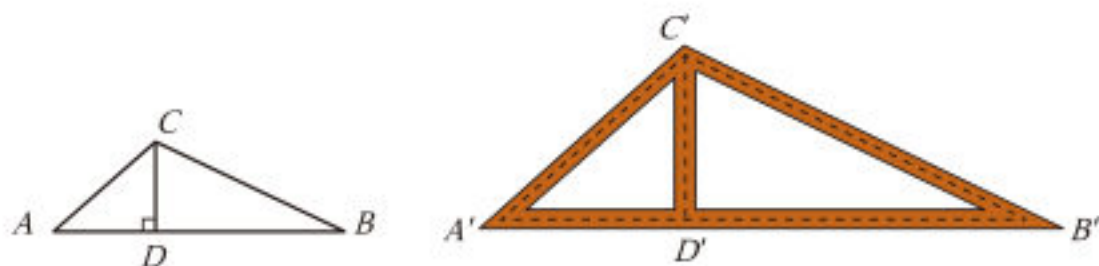


图 3-22

思考·交流

(1) 如图 3-23，已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 3，那么这两个三角形的两条中线 AD ， $A'D'$ 有怎样的关系？你还能提出类似的问题吗？与同伴进行交流。

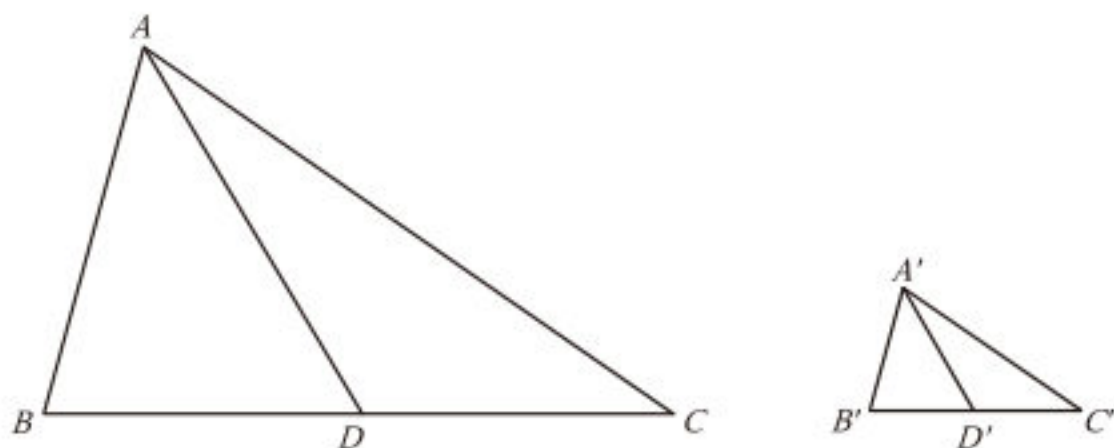


图 3-23

(2) 如果两个三角形相似，那么它们的对应高的比是多少？对应角平分线的比是多少？对应中线的比呢？请说明你的理由。

定理 相似三角形对应高的比、对应角平分线的比、对应中线的比都等于相似比。

操作·思考

如图 3-24, 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 k ; 点 D, E 在边 BC 上, 点 D', E' 在边 $B'C'$ 上。

- (1) 若 $\angle BAD = \frac{1}{3} \angle BAC$, $\angle B'A'D' = \frac{1}{3} \angle B'A'C'$, 则 $\frac{AD}{A'D'}$ 的值等于多少?
- (2) 若 $BE = \frac{1}{3} BC$, $B'E' = \frac{1}{3} B'C'$, 则 $\frac{AE}{A'E'}$ 的值等于多少?
- (3) 你能提出更一般性的问题吗?

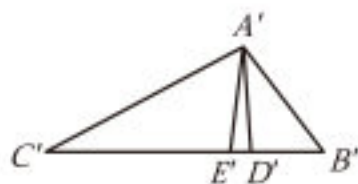
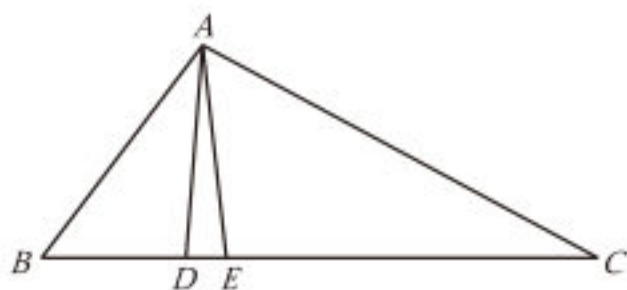


图 3-24

例1 如图 3-25, AD 是 $\triangle ABC$ 的高, $AD = h$, 点 R 在边 AC 上, 点 S 在边 AB 上, $SR \perp AD$, 垂足为 E 。当 $SR = \frac{1}{2} BC$ 时, 求 DE 的长。如果 $SR = \frac{1}{3} BC$ 呢?

解: $\because SR \perp AD, BC \perp AD,$

$\therefore SR \parallel BC。$

$\therefore \angle ASR = \angle B, \angle ARS = \angle C。$

$\therefore \triangle ASR \sim \triangle ABC$ (两角分别相等的两个三角形相似)。

$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{SR}{BC}$ (相似三角形对应高的比等于相似比),

即 $\frac{AD - DE}{AD} = \frac{SR}{BC}。$

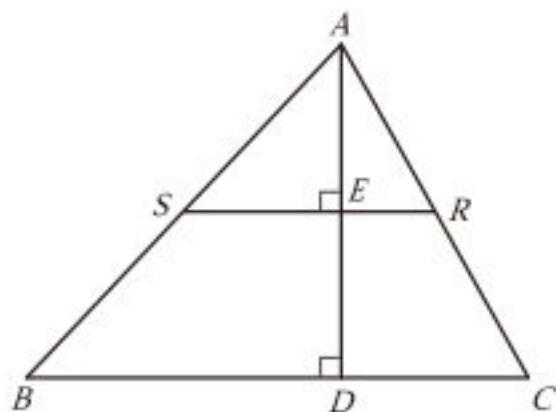


图 3-25

当 $SR = \frac{1}{2} BC$ 时, 得 $\frac{h-DE}{h} = \frac{1}{2}$ 。解得 $DE = \frac{1}{2} h$ 。

当 $SR = \frac{1}{3} BC$ 时, 得 $\frac{h-DE}{h} = \frac{1}{3}$ 。解得 $DE = \frac{2}{3} h$ 。

随堂练习

1. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, BD 和 $B'D'$ 是它们的对应中线, $\frac{AC}{A'C'} = \frac{3}{2}$, $B'D' = 4 \text{ cm}$, 求 BD 的长。
2. 两个相似三角形一组对应角平分线的长分别是 2 cm 和 5 cm , 求这两个三角形的相似比。在这两个三角形的一组对应中线中, 如果较短中线的长是 3 cm , 那么较长的中线有多长?

两个全等三角形的周长相等、面积相等, 那么两个相似三角形的周长、面积分别有怎样的关系呢?

尝试·思考

如果 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 相似比为 2 , 那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长比是多少? 面积比呢?

如果 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 相似比为 k , 那么你能求 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长比和面积比吗?

定理 相似三角形的周长比等于相似比, 面积比等于相似比的平方。

思考·交流

- (1) 两个相似四边形的周长比等于相似比吗? 两个相似 n 边形呢?
- (2) 两个相似四边形的面积比等于相似比的平方吗? 你能利用相似三角形的性质说明吗? 两个相似 n 边形呢? 与同伴进行交流。

例2 如图 3-26, 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移, 得到 $\triangle DEF$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 重叠部分 (图中阴影部分) 的面积 $S_{\triangle GEC}$ 是 $\triangle ABC$ 面积 $S_{\triangle ABC}$ 的一半。已知 $BC=2$, 求 $\triangle ABC$ 平移的距离。

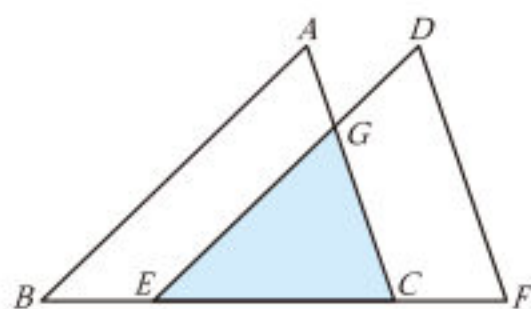


图 3-26

解: 根据平移的性质可知, $EG \parallel AB$ 。

$$\therefore \angle GEC = \angle B, \angle EGC = \angle A.$$

$\therefore \triangle GEC \sim \triangle ABC$ (两角分别相等的两个三角形相似)。

$$\therefore \frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{EC}{BC}\right)^2 = \frac{EC^2}{BC^2} \text{ (相似三角形的面积比等于相似比的平方),}$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} = \frac{EC^2}{2^2}.$$

$$\therefore EC^2 = 2.$$

$$\therefore EC = \sqrt{2}.$$

$$\therefore BE = BC - EC = 2 - \sqrt{2},$$

即 $\triangle ABC$ 平移的距离为 $2 - \sqrt{2}$ 。

回顾·反思

对比全等三角形和相似三角形的学习过程, 你对图形的全等与相似及其研究方法有什么感悟? 积累了哪些经验? 与同伴进行交流。

随堂练习

1. 判断正误:

(1) 如果把一个三角形三边的长同时扩大为原来的 10 倍, 那么它的周长也扩大为原来的 10 倍; ()

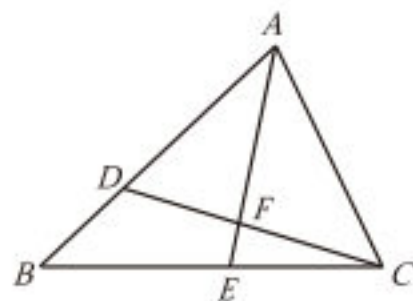
(2) 如果把一个三角形的面积扩大为原来的 9 倍, 那么它三边的长都扩大为原来的 9 倍。 ()



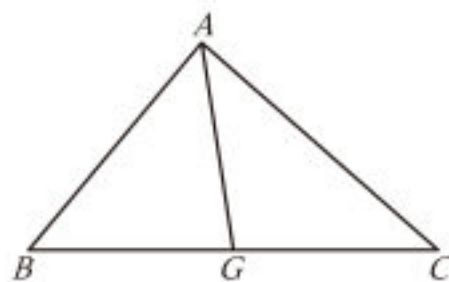
习题3.4

> 知识技能

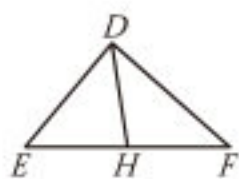
1. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, AD 和 $A'D'$ 是它们的对应角平分线。已知 $AD = 8 \text{ cm}$, $A'D' = 3 \text{ cm}$, 求 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 对应高的比。
2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AB 上的一点, 且 $\angle ACD = \angle B$, $\triangle ABC$ 的角平分线 AE 交 CD 于点 F 。已知 $AB = 5$, $AC = 4$, $AF = 3$, 求 EF 的长。



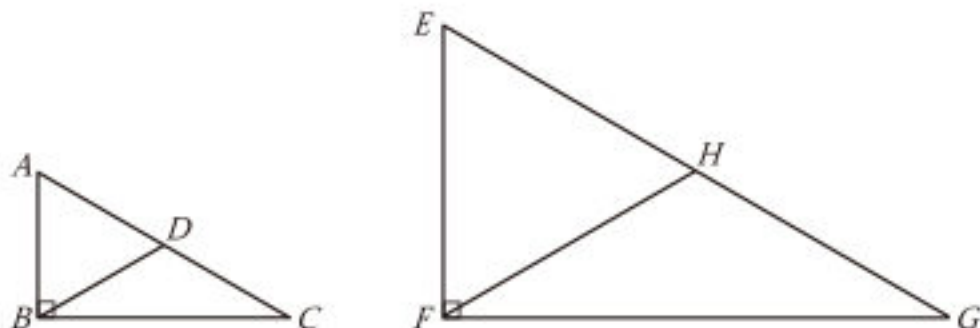
(第2题)



(第3题)



3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, G , H 分别是边 BC 和 EF 的中点, 已知 $AB = 2DE$, $AC = 2DF$, $\angle BAC = \angle EDF$.
 (1) 中线 AG 与 DH 的比是多少?
 (2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积比是多少?
4. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC \sim \text{Rt}\triangle EFG$, $EF = 2AB$, BD 和 FH 分别是它们的中线, $\triangle BDC$ 与 $\triangle FHG$ 是否相似? 如果相似, 试确定其周长比和面积比。

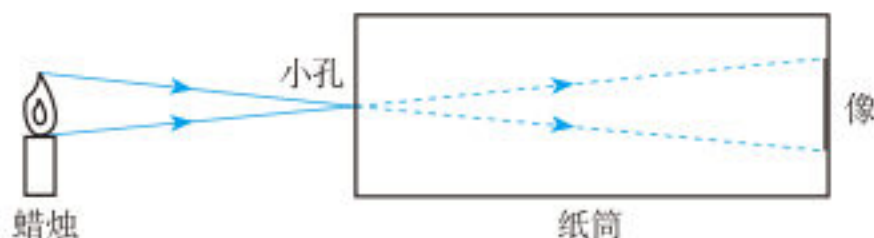


(第4题)

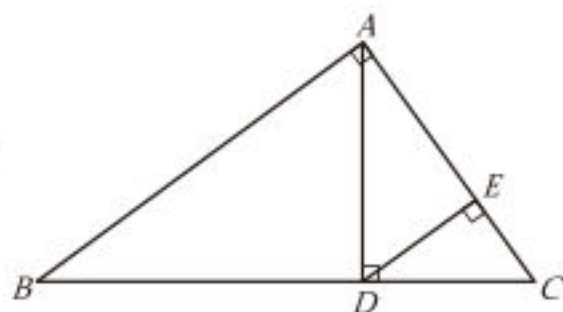
> 问题解决

5. 如图, 小亮自制了一个小孔成像装置, 其中纸筒的长度为 15 cm 。他测得

蜡烛火焰所成的像约为 3 cm，蜡烛到纸筒小孔端的距离为 10 cm。蜡烛火焰大约有多高？

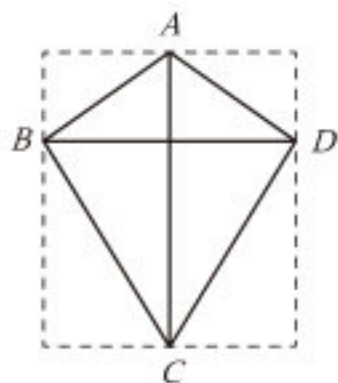


(第5题)



(第6题)

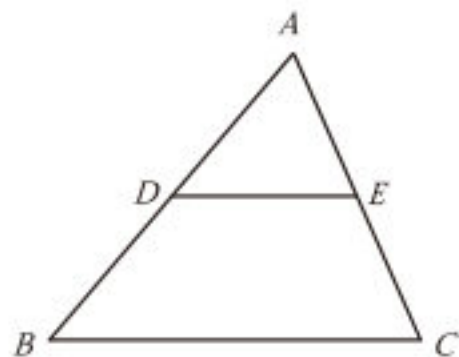
6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的高， DE 是 $\triangle ACD$ 的高，图中哪些线段的比等于 $\frac{AD}{DE}$ ？
7. 一块三角形土地的一边长为 120 m，在地图上量得它的对应边长为 0.06 m，这边上的高为 0.04 m，求这块地的实际面积。
8. 一只小风筝与一只大风筝形状相同，它们的形状如图所示，其中对角线 $AC \perp BD$ 。已知它们的对应边之比为 1:3，小风筝两条对角线的长分别为 12 cm 和 14 cm。
 - (1) 小风筝的面积是多少？
 - (2) 如果在大风筝内装设一个连接对角顶点的十字交叉形的支撑架，那么至少需用多长的材料（不计损耗）？
 - (3) 大风筝要用彩色纸覆盖，而彩色纸是从一张刚好覆盖整个风筝的矩形彩色纸（如图中虚线所示）裁剪下来的，那么从四个角裁剪下来废弃不用的彩色纸的面积是多少？



(第8题)

联系拓广

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分别是边 AB 和 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$ 。
 - (1) 若 $AD : DB = 1:1$ ，则 $\triangle ADE$ 与四边形 $DBCE$ 的面积之比等于多少？
 - (2) 若 $\triangle ADE$ 与四边形 $DBCE$ 的面积相等，则 $DE : BC$ ， $AD : DB$ 分别等于多少？



(第9题)

5

图形的位似

图 3-27 是一幅宣传海报，它由一组形状相同的图片组成。在图片①和图片②上任取一组对应点 A, A' ，可以发现：直线 AA' 都经过镜头中心点 O ，且 $\frac{OA'}{OA}$ 都等于一个固定值。请你实际试一试。

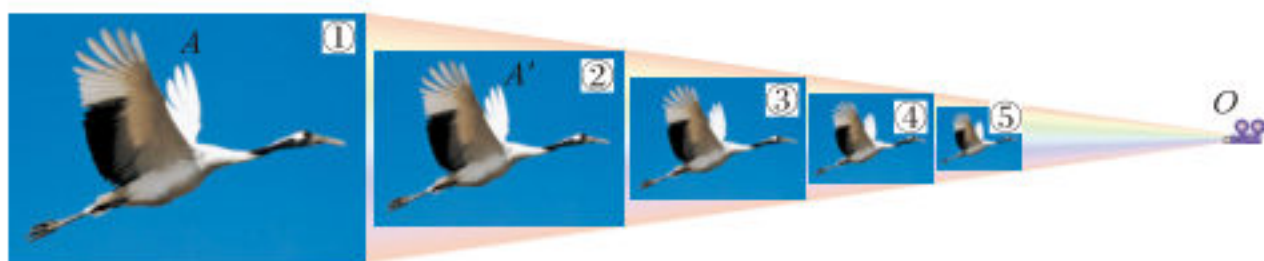


图 3-27

两个相似五边形的位置关系如图 3-28 所示，直线 AA' 与 BB' 相交于点 O ，那么直线 CC', DD', EE' 是否也都经过点 O ？ $\frac{OA'}{OA}, \frac{OB'}{OB}, \frac{OC'}{OC}, \frac{OD'}{OD}, \frac{OE'}{OE}$ 有什么关系？请你实际画一画、量一量，并与同伴进行交流。

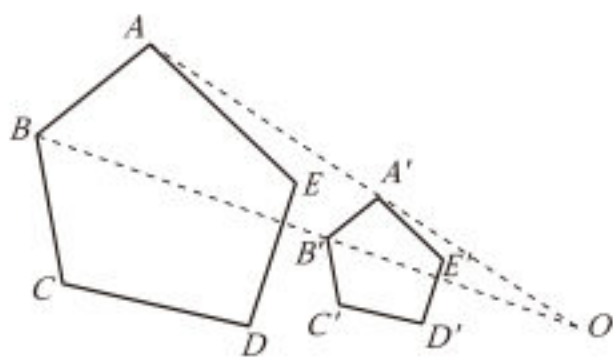


图 3-28

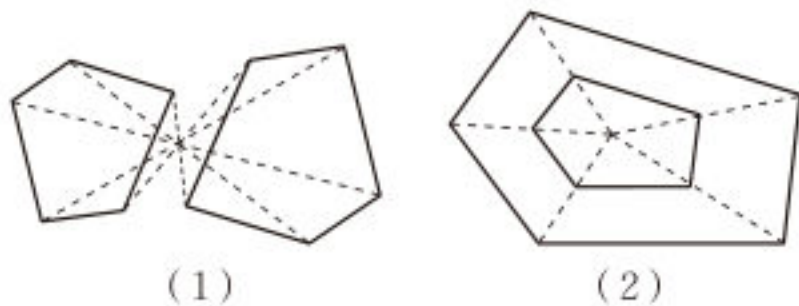


图 3-29

一般地，如果两个相似多边形任意一组对应顶点 P, P' 所在的直线都经过同一点 O ，且有 $OP' = k \cdot OP$ ($k \neq 0$)，那么这样的两个多边形叫作**位似多边形** (homothetic polygons)，点 O 叫作**位似中心** (homothetic center)。实际上， k 就是这两个相似多边形的相似比。

图 3-28 中的两个五边形就是位似五边形，图 3-29 每组中的两个五边形也是位似五边形。

例1 如图 3-30, 已知 $\triangle ABC$, 以点 O 为位似中心画一个 $\triangle DEF$, 使它与 $\triangle ABC$ 位似, 且相似比为 2。

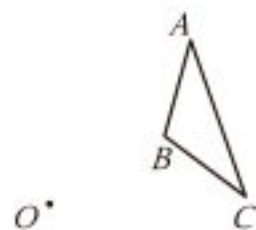


图 3-30

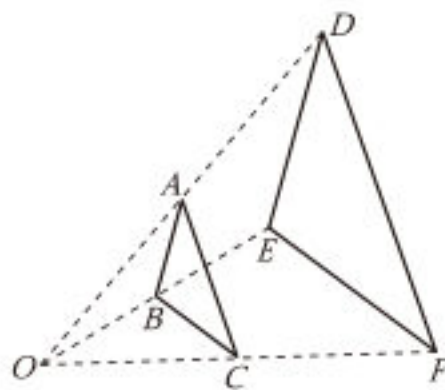


图 3-31

满足条件的 $\triangle DEF$ 可以在点 O 的另一侧吗?

解: 如图 3-31, 画射线 OA , OB , OC ; 在射线 OA , OB , OC 上分别取点 D , E , F , 使 $OD = 2OA$, $OE = 2OB$, $OF = 2OC$; 用线段依次连接点 D , E , F , 则 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 位似, 相似比为 2。

操作·交流

利用下面的方法可以近似地将一个图形放大。

1. 如图 3-32, 将两根长短相同的橡皮筋系在一起, 连接处形成一个结点。
2. 选取一个图形, 在图形外适当位置取一个定点。
3. 将系在一起的橡皮筋的一端固定在定点, 把一支铅笔固定在橡皮筋的另一端。



图 3-32

4. 拉动铅笔, 使两根橡皮筋的结点沿所选图形的边缘运动, 当结点在已知图形上运动一圈时, 铅笔就画出了一个新的图形。这个新图形与已知图形形状相同。

请你用这种方法把一个已知图形放大, 并与同伴进行交流。

随堂练习

1. 已知点 O 在 $\triangle ABC$ 内, 以点 O 为位似中心画一个三角形, 使它与 $\triangle ABC$ 位似, 且相似比为 $\frac{1}{2}$ 。

如图 3-33, 在平面直角坐标系中, $\triangle OAB$ 三个顶点的坐标分别是 $O(0, 0)$, $A(3, 1)$, $B(2, 3)$ 。

将点 O, A, B 的横坐标、纵坐标都乘 2, 得到三个点, 以这三个点为顶点的三角形与 $\triangle OAB$ 位似吗? 如果位似, 指出位似中心和相似比。

如果将点 O, A, B 的横坐标、纵坐标都乘 -2 呢?

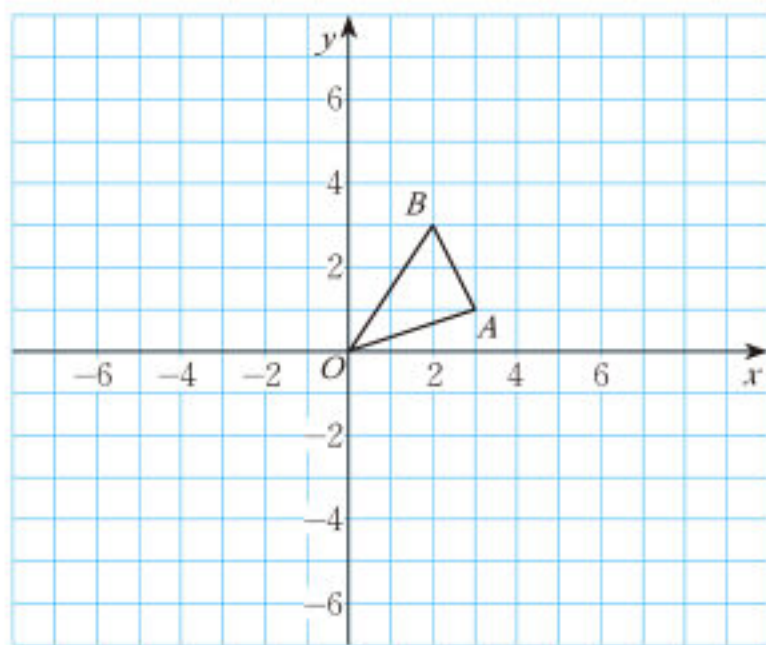


图 3-33

操作 · 思考

如图 3-34, 在平面直角坐标系中, 四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别是 $A(4, 2)$, $B(8, 6)$, $C(6, 10)$, $D(-2, 6)$ 。

(1) 将点 A, B, C, D 的横坐标、纵坐标都乘 $\frac{1}{2}$, 得到四个点, 以这四个点为顶点的四边形与四边形 $ABCD$ 位似吗? 如果位似, 指出位似中心和相似比。

(2) 如果将点 A, B, C, D 的横坐标、纵坐标都乘 $-\frac{1}{2}$ 呢?

(3) 你还能提出更一般性的问题吗?

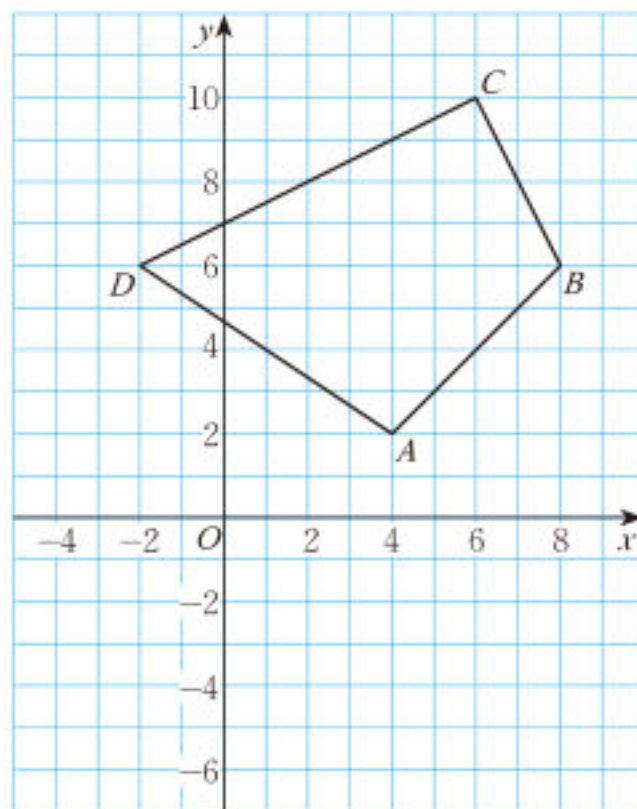


图 3-34

在平面直角坐标系中, 将一个多边形每个顶点的横坐标、纵坐标都乘同一个数 k ($k \neq 0$), 所对应的图形与原图形位似, 位似中心是坐标原点, 它们的相似比为 $|k|$ 。

例2 在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(3, 6)$, $C(-3, 3)$ 。以原点 O 为位似中心画一个四边形，使它与四边形 $OABC$ 位似，且相似比是 $\frac{2}{3}$ 。

分析：为了使画出的四边形与原四边形的相似比为 $\frac{2}{3}$ ，需要将原四边形每个顶点的横坐标、纵坐标都乘多少？

解：如图 3-35，有两种画法。

画法一：将四边形 $OABC$ 各顶点的横坐标、纵坐标都乘 $\frac{2}{3}$ ，得到 $O(0, 0)$, $A'(4, 0)$, $B'(2, 4)$, $C'(-2, 2)$ ；在平面直角坐标系中描出点 A' , B' , C' ，用线段依次连接点 O, A', B', C', O ，则四边形 $OA'B'C'$ 就是符合要求的四边形。

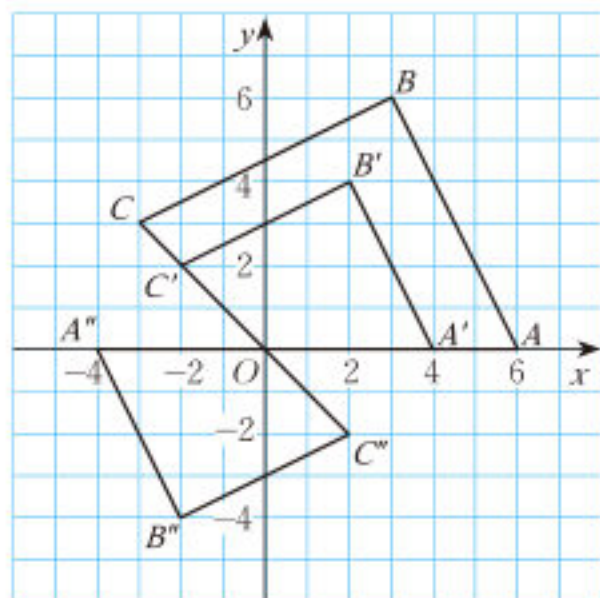
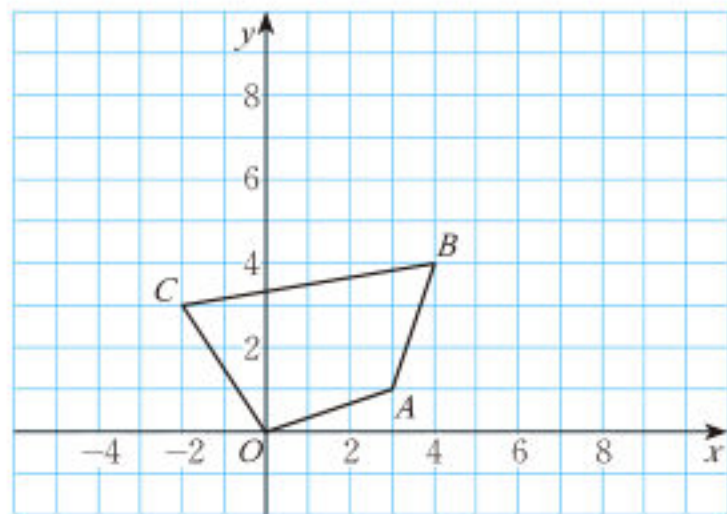


图 3-35

画法二：将四边形 $OABC$ 各顶点的横坐标、纵坐标都乘 $-\frac{2}{3}$ ，得到 $O(0, 0)$, $A''(-4, 0)$, $B''(-2, -4)$, $C''(2, -2)$ ；在平面直角坐标系中描出点 A'' , B'' , C'' ，用线段依次连接点 O, A'', B'', C'', O ，则四边形 $OA''B''C''$ 也是符合要求的四边形。

随堂练习

- 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 $O(0, 0)$, $A(3, 1)$, $B(4, 4)$, $C(-2, 3)$ ，以原点 O 为位似中心画一个四边形，使它与四边形 $OABC$ 位似，且相似比是 2。



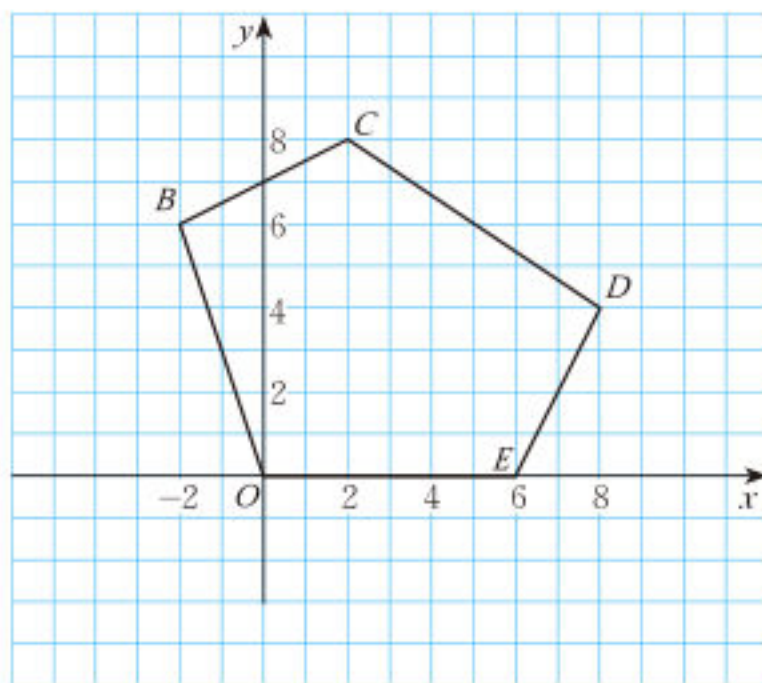
(第 1 题)



习题3.5

> 知识技能

1. 已知边长为 1 的正方形 $ABCD$ ，以它的两条对角线的交点为位似中心，画一个边长为 2 并与它位似的正方形。
2. 在平面直角坐标系中， $\triangle OBC$ 各顶点的坐标分别是 $O(0, 0)$ ， $B(6, 0)$ ， $C(8, 4)$ 。将点 O ， B ， C 的横坐标、纵坐标都乘 $\frac{1}{2}$ ，得到三个点，以这三个点为顶点的三角形与 $\triangle OBC$ 位似吗？
3. 如图，在平面直角坐标系中，以原点 O 为位似中心，画出五边形 $OBCDE$ 的位似图形，使它与五边形 $OBCDE$ 的相似比为 $\frac{1}{2}$ 。比较两个图形对应点的坐标，你能发现什么？



(第3题)

> 数学理解

4. 在平面直角坐标系中，五边形 $OBCDE$ 与五边形 $OFGHJ$ 位似，位似中心是原点 O ，五边形 $OBCDE$ 与五边形 $OFGHJ$ 的相似比是 k ，这两个五边形每组对应顶点到位似中心的距离有什么关系？

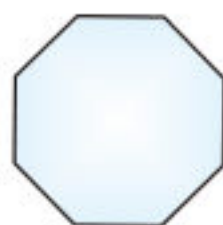
5. 在平面直角坐标系中，四边形 $OBCD$ 与四边形 $OEFG$ 位似，位似中心是原点 O 。已知 C 与 F 是对应顶点，且 C, F 的坐标分别是 $C(3, 7), F(9, 21)$ ，那么四边形 $OBCD$ 与四边形 $OEFG$ 的相似比是多少？四边形 $OEFG$ 与四边形 $OBCD$ 的相似比呢？

> 问题解决

6. 九(1)班的同学们筹备一次主题班会，为了活跃气氛，他们想把下面的两个图样放大，使得放大前后对应线段的比为 $1:2$ ，然后做成各种彩纸图片。请你帮助他们画出放大后的图样。



(1)



(2)

(第6题)

7. 图形的位似与图形的平移、旋转、轴对称有什么联系和区别？请以此为主题写一篇小短文。



问题解决活动：利用相似三角形测高

问题 你能利用相似三角形的相关知识，使用标杆、皮尺或你认为合适的工具，测量出学校旗杆的高度吗？

理解问题

- (1) 你学过哪些测量距离或高度的方法？请举例说明。
- (2) 本节课的测量活动对测量工具和方法有哪些要求？

拟订计划

- (1) 小组合作，讨论各种测量方案及其可行性。
- (2) 每种测量方案分别需要用到哪些工具？需要测量哪些量？画出测量示意图，写出旗杆高度的表达式。

实施计划

- (1) 各小组到操场进行实地测量，做好数据记录。
- (2) 梳理测量过程并撰写活动报告（下页所附活动报告供参考）。

回顾反思

- (1) 你们在活动过程中遇到了哪些困难？是如何克服的？
- (2) 各小组汇报展示活动成果，共同讨论各种测量方案的异同及优缺点。

请你解决下列问题。

1. 某单位的摄像系统记录了一犯罪嫌疑人作案的全过程。请你设计一个方案，估计该犯罪嫌疑人的身高。
2. 选择一幢高楼或一棵大树，测量其高度，并撰写活动报告。

附：活动报告

年 月 日

课题名称				
测量示意图				
测量数据	测量项目	第一次	第二次	平均值
计算过程				
活动感受				
参加人员				
计算者及复核者				
指导教师审核意见				
备注				

阅读·思考

刘徽与《海岛算经》

刘徽是我国历史上杰出的数学家。《九章算术注》和《海岛算经》是他留给后世最宝贵的数学遗产。

《海岛算经》最早为《九章算术注》的第十卷，唐初开始单行。刘徽在该书中精心选编了九个测量问题，都是利用测量的方法来计算高、深、广、远问题的。其中第一个问题是测算海岛的高、远问题，因此得名。《海岛算经》是中国最早的一部测量数学专著，也是中国古代高度发达的地图学的数学基础。

《海岛算经》第一个问题的大意：如图3-36，要测量海岛上一座山峰的高度 AH ，立两根高3丈的标杆 BC 和 DE ，两杆之间的距离 $BD=1\ 000$ 步， D, B, H 三点成一线；从 B 处退行123步到 F 处，眼睛贴着地面从 F 处观察 A 点， A, C, F 三点成一线；从 D 处退行127步到 G 处，眼睛贴着地面从 G 处观察 A 点， A, E, G 三点也成一线。试计算山峰的高度 AH 及 HB 的长（这里1步 = 6尺，1丈 = 10尺，结果用丈表示）。

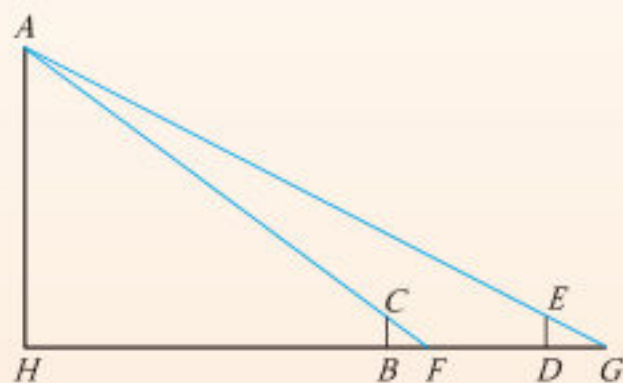


图 3-36

怎样利用相似三角形求得线段 AH 及 HB 的长呢？请你试一试！



回顾与思考

1. 举例说明比例的性质。
2. 判定两个三角形相似的条件有哪些？你是如何得到它们的？三角形相似与三角形全等有怎样的关系？
3. 相似三角形有哪些性质？
4. 如何将一个图形放大或缩小？请举例说明。
5. 在平面直角坐标系中，如何利用多边形各顶点坐标的变化得到与原多边形位似的多边形？请举例说明。
6. 梳理本章内容，用适当的方式呈现全章知识结构，并与同伴进行交流。



复习题

> 知识技能

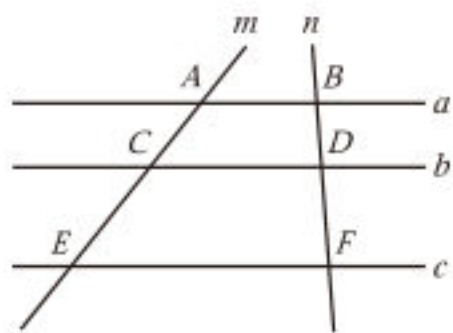
1. 判断正误：

- (1) 若线段 $a = 5 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, 则 $a : b = 5 : 2$; ()
- (2) 若 A, B 两地在地图上的距离为 7 cm , 地图的比例尺为 $1 : 5\,000$, 则 A, B 两地的实际距离为 35 m ; ()
- (3) 若线段 $AB = \sqrt{5} \text{ cm}$, 点 C 是 AB 的黄金分割点, 且 $AC > BC$, 则 $AC = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ cm}$. ()

2. (1) 四条线段 a, b, c, d 成比例, 其中 $b = 3 \text{ cm}$, $c = 2 \text{ cm}$, $d = 6 \text{ cm}$, 求线段 a 的长;

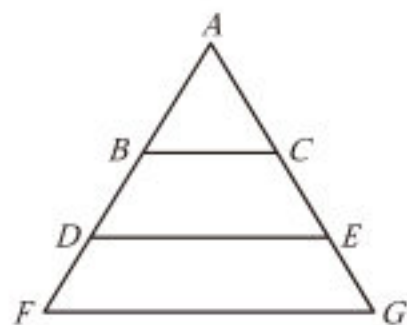
- (2) 已知 $\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} \neq 0$, 且 $a + b - 2c = 3$, 求 a 的值。

3. 如图, 已知直线 $a \parallel b \parallel c$, 分别交直线 m, n 于点 A, C, E, B, D, F, $AC = 4$, $CE = 6$, $BD = 3$, 求 BF 的长。

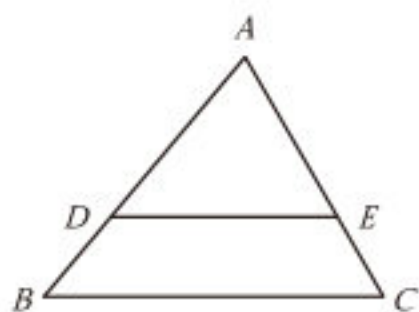


(第3题)

4. 如图, 在 $\triangle AFG$ 中, 点 B, D 在边 AF 上, 点 C, E 在边 AG 上, $BC \parallel DE \parallel FG$, 图中有几对相似三角形? 你是怎样判断的?

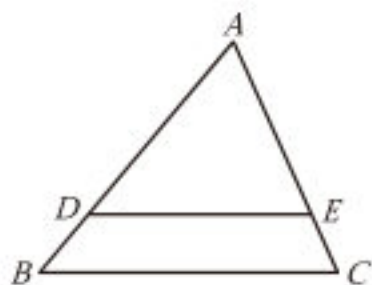


(第4题)

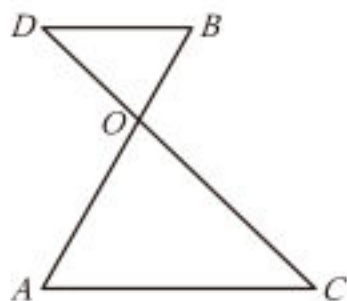


(第5题)

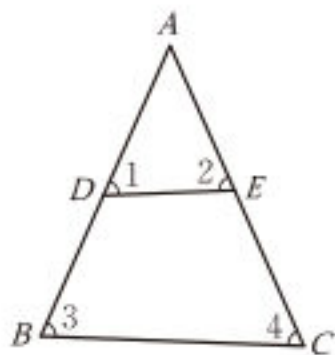
5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是边 AB 和 AC 上的点, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $AD = 2a$ cm, $DB = a$ cm, $BC = b$ cm, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. 求:
 (1) $\angle ADE$ 的度数; (2) $\angle AED$ 的度数; (3) DE 的长.
6. 如果两个相似三角形的面积比为 $4:9$, 那么这两个相似三角形对应边的比是多少?
7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是边 AB 和 AC 上的点, $DE \parallel BC$, $AD = 3BD$, $S_{\triangle ABC} = 48$, 求 $S_{\triangle ADE}$.
8. 如图, 线段 AB 与 CD 相交于点 O , 且 $AC \parallel BD$, 那么 $OA \cdot OD = OC \cdot OB$ 成立吗? 为什么?



(第7题)



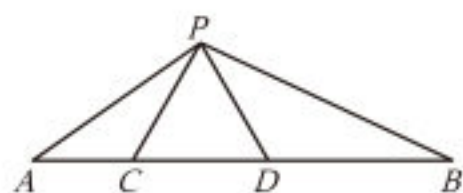
(第8题)



(第9题)

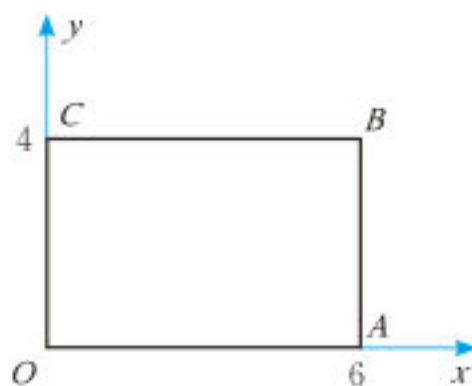
9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是边 AB 和 AC 上的点, 且 $AD = 31$, $DB = 29$, $AE = 30$, $EC = 32$. 请找出 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ 中相等的角.
10. 某公园中的儿童游乐场是两个相似三角形地块, 相似比为 $\frac{2}{3}$, 面积之差为 30 m^2 , 它们的面积之和是多少?

11. 如图, 点 C, D 在线段 AB 上, $\triangle PCD$ 是等边三角形, 且 $\triangle ACP \sim \triangle PDB$, 求 $\angle APB$ 的度数。



(第 11 题)

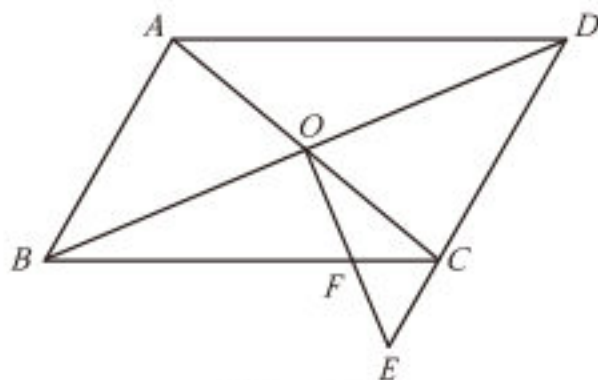
12. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(6, 4)$, $C(0, 4)$ 。已知矩形 $OA'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 位似, 位似中心是原点 O , 且矩形 $OA'B'C'$ 的面积等于矩形 $OABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$, 求点 B' 的坐标。



(第 12 题)

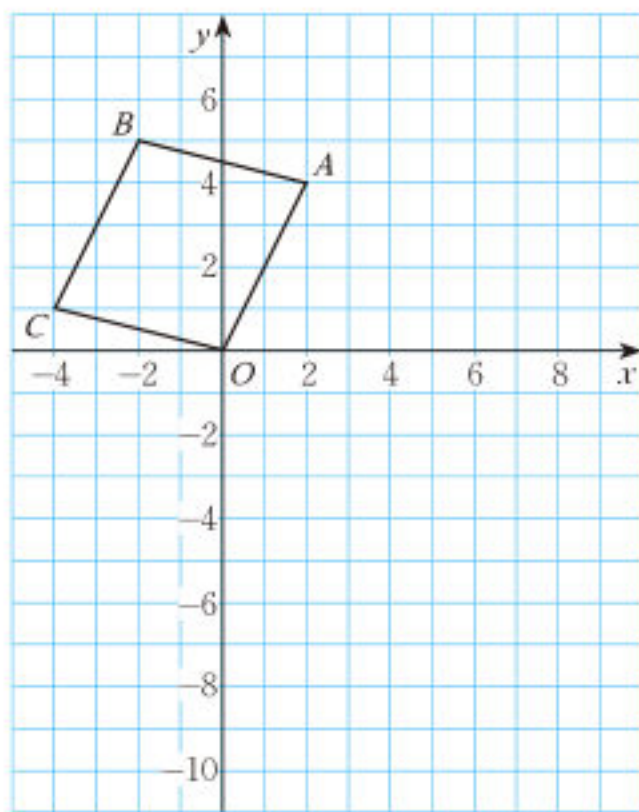
数学理解

13. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 在 DC 的延长线上取一点 E , 连接 OE , 交 BC 于点 F 。已知 $AB = a$, $BC = b$, $EC = c$, 求 CF 的长。



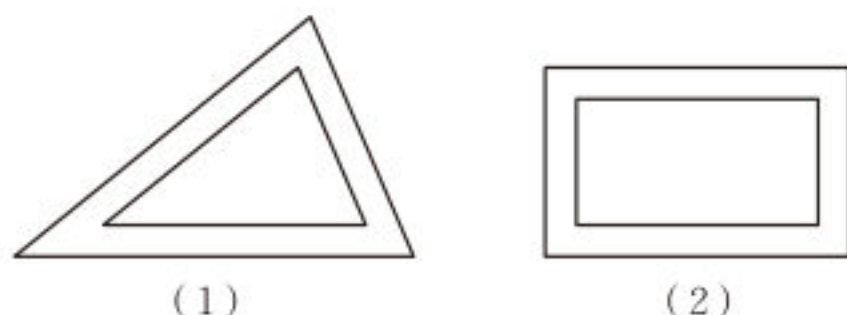
(第 13 题)

14. 如图, 在平面直角坐标系中, 将四边形 $OABC$ 四个顶点的横坐标、纵坐标都乘 -2 , 画出以所得四个点为顶点的四边形, 并指出这两个四边形的位似中心和相似比。



(第 14 题)

15. 将三角形各边向外平移 1 个单位长度并适当延长, 得到如图 (1) 所示的图形, 变化前后的两个三角形相似吗? 为什么? 如图 (2), 如果把三角形改为矩形呢?

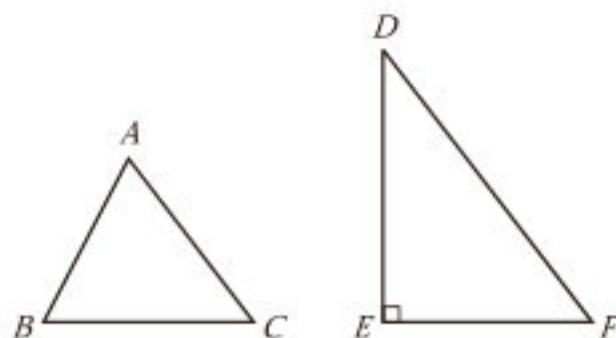


(1)

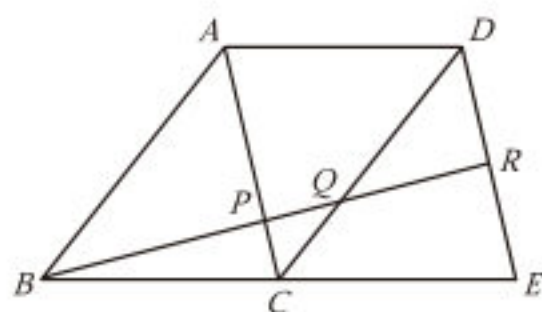
(2)

(第 15 题)

16. 如图, 有两张三角形纸片 ABC 与 DEF , 其中 BC 边与 EF 边在一条直线上, $AC \parallel DF$. 将纸片 DEF 截去一块, 使它变为与纸片 ABC 相似的纸片。



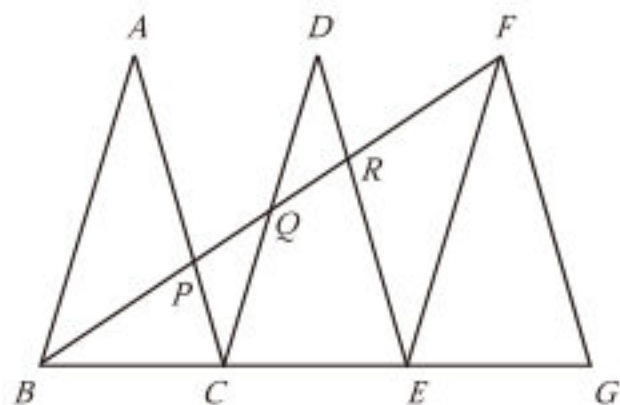
(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 和四边形 $ACED$ 都是平行四边形, 点 R 为 DE 的中点, BR 分别交 AC 和 CD 于点 P, Q , 求 $BP : PQ : QR$.
18. 如图, 已知 $\triangle ABC$, $\triangle DCE$, $\triangle FEG$ 是三个全等的等腰三角形, 底边 BC , CE , EG 在同一直线上, 且 $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$, BF 分别交 AC , DC , DE 于点 P, Q, R .

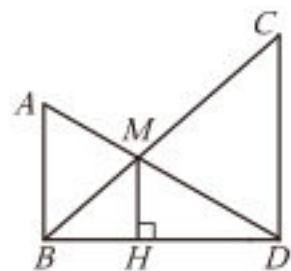
- (1) 求证: $\triangle BFG \sim \triangle FEG$;
(2) 求 $AP : PC$.



(第 18 题)

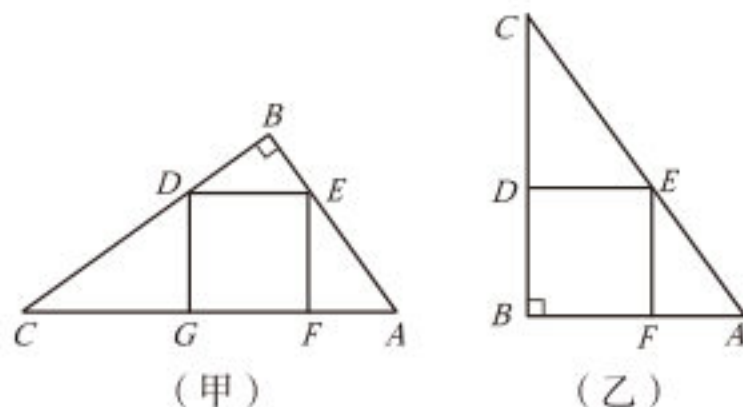
问题解决

19. 如图, AB 和 CD 表示两根直立于地面的柱子, AD 和 BC 表示起固定作用的两根笔直的钢筋, AD 与 BC 的交点为 M 。已知 $AB = 10$ m, $CD = 15$ m, 求点 M 到地面的距离 MH 。



(第19题)

20. 一块直角三角形木板的面积为 1.5 m^2 , 一条直角边 AB 为 1.5 m, 怎样才能把它加工成一个无拼接的面积最大的正方形桌面? 甲、乙两位木匠的加工方法如图所示, 请你用学过的知识说明哪位木匠的方法符合要求 (不考虑加工损耗)。

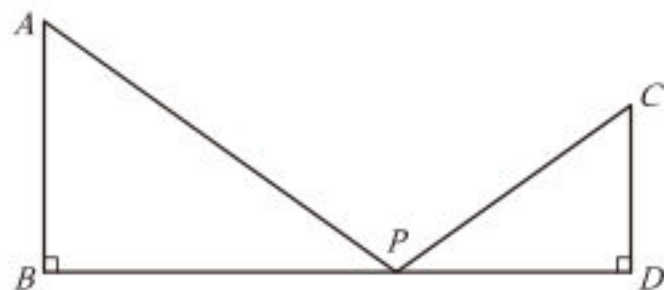


(第20题)

21. 通过本章的学习, 你对全等三角形和相似三角形的关系有哪些感悟? 这对今后的数学学习有怎样的启发? 撰写一篇小短文, 并在班级内分享。

联系拓广

22. 如图, $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, $AB = 6$, $CD = 4$, $BD = 14$, P 是线段 BD 上的一个动点, 当以 P, C, D 为顶点的三角形与 $\triangle ABP$ 相似时, PB 的长是多少?



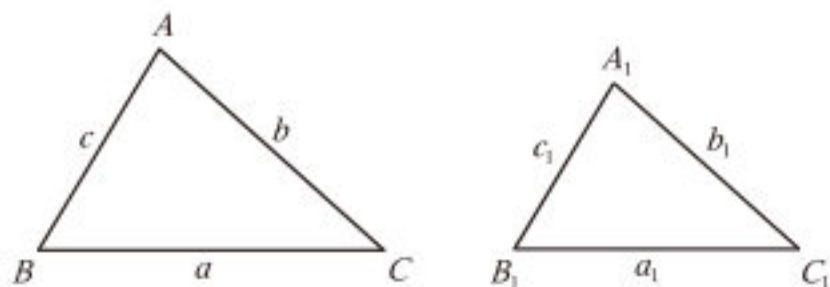
(第22题)

23. 如图, $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c ($a > b > c$), $\triangle A_1B_1C_1$ 的三边长分别为 a_1, b_1, c_1 , $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, 相似比为 k ($k > 1$).

(1) 若 $c = a_1$, 求证: $a = kc$.

(2) 若 $c = a_1$, 试给出符合条件的一对 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$, 使得 a, b, c 和 a_1, b_1, c_1 都是正整数。

(3) 若 $b = a_1, c = b_1$, 是否存在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 使得 $k = 2$? 请说明理由。



(第 23 题)

第四章

投影与视图

影子在日常生活中随处可见，白天的阳光下、夜晚的路灯下都能看到物体的影子。很多时候，相同物体的影子形状却不同。哪些因素会影响影子的形状？如何用数学的眼光看待影子？七年级学习的从三个方向看物体的形状，与影子又有什么关系？

本章将认识一些常见的投影现象，学习简单几何体的三种视图。你将通过观察、操作、想象、推理，感知图形的位置特征和形状特征，经历立体图形和平面图形相互转化的过程，进一步发展几何直观和空间观念等。



在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：



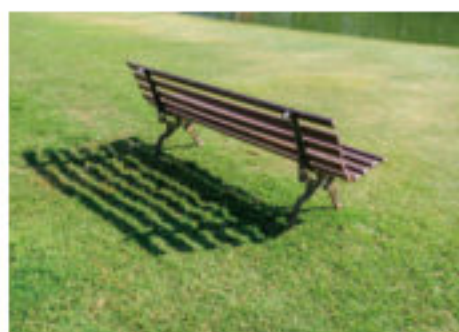
- 💡 从生活中的影子到数学中的投影，再到对视图的研究，经历了怎样的过程？
- 💡 研究一个几何体的投影与三种视图有什么意义和价值？

1 投 影

在日常生活中，我们可以看到各种各样的影子。比如，在图 4-1 中，太阳光照射在玻璃窗框、长椅等物体上时，会在墙壁或地面上留下影子；皮影和手影则是灯光照射形成的影子。



窗框的影子



长椅的影子



皮影



手影

图 4-1

物体在光的照射下，会在地面或其他平面上留下它的影子，这就是**投影**（projection）现象。影子所在的平面称为**投影面**。

操作·思考

取一些长度不同的小棒和三角形、矩形纸片，用手电筒（或台灯）等照射这些小棒和纸片，观察它们的影子。

（1）固定手电筒（或台灯），改变小棒或纸片的摆放位置和方向，影子分别发生了什么变化？

（2）固定小棒或纸片，改变手电筒（或台灯）的摆放位置和照射方向，影子分别发生了什么变化？

手电筒、路灯和台灯的光可以看成是从一个点发出的，这样的光所形成的投影称为**中心投影**（central projection）。

例1 确定图 4-2 中路灯灯泡所在的位置。

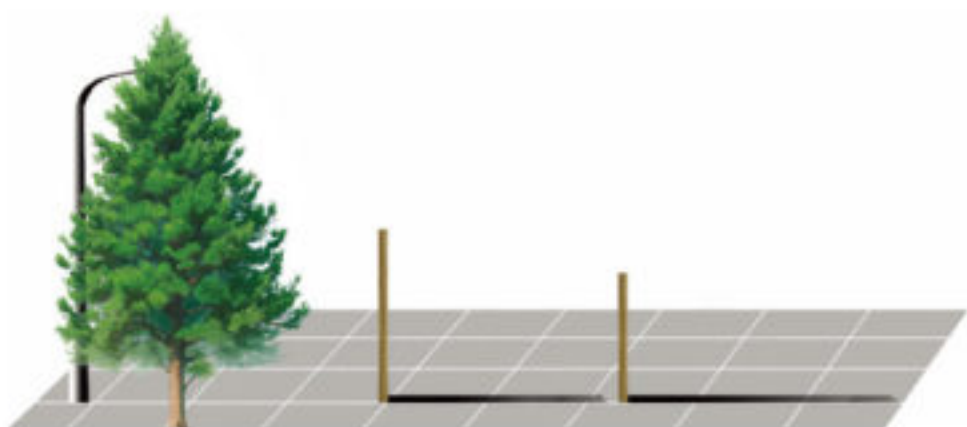


图 4-2

解：如图 4-3，过一根木杆的顶端及木杆影子的顶端画一条直线，再过另一根木杆的顶端及木杆影子的顶端画一条直线，两线相交于点 O 。点 O 就是路灯灯泡所在的位置。

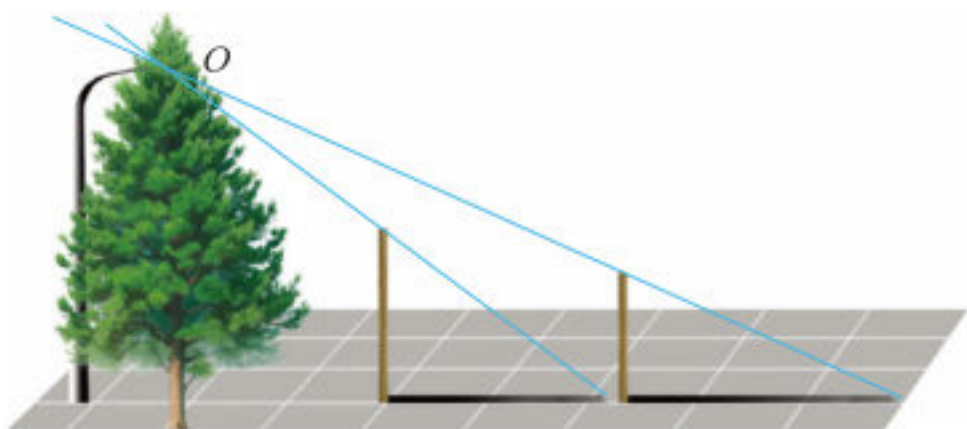


图 4-3

思考·交流

如图 4-4，一个广场中央有一盏路灯。

(1) 身高相同的两个人在这盏路灯下的影子一定一样长吗？如果不一定，那么什么情况下他们的影子一样长？

(2) 身高不同的两个人在这盏路灯下的影子有可能一样长吗？与同伴进行交流。

(3) 一个人在路灯下影子的长短与什么因素有关？随着这些因素的变化，影子是如何变化的？

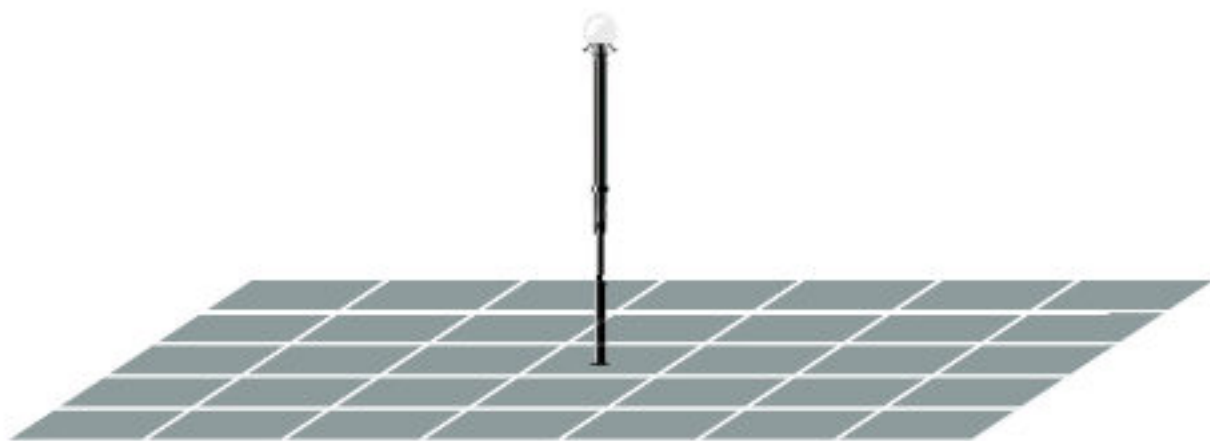


图 4-4

随堂练习

1. 举例说明生活中的中心投影现象。
2. 两棵小树在一盏路灯下的影子如图所示。
 - (1) 确定该路灯灯泡所在的位置；
 - (2) 在图中画出表示婷婷影长的线段。



(第 2 题)

取一些长度不同的小棒及三角形、矩形纸片，观察它们在太阳光下的影子。

(1) 固定投影面，改变小棒或纸片的摆放位置和方向，影子分别发生了什么变化？

(2) 固定小棒或纸片，改变投影面的摆放位置和方向，影子分别发生了什么变化？

太阳光线可以看成平行光线，平行光线所形成的投影称为**平行投影** (parallel projection)。图 4-5 (1) (2) 表示的都是平行投影，其中图 4-5 (2) 中的平行光线与投影面垂直，这种投影称为**正投影** (orthographic projection)。

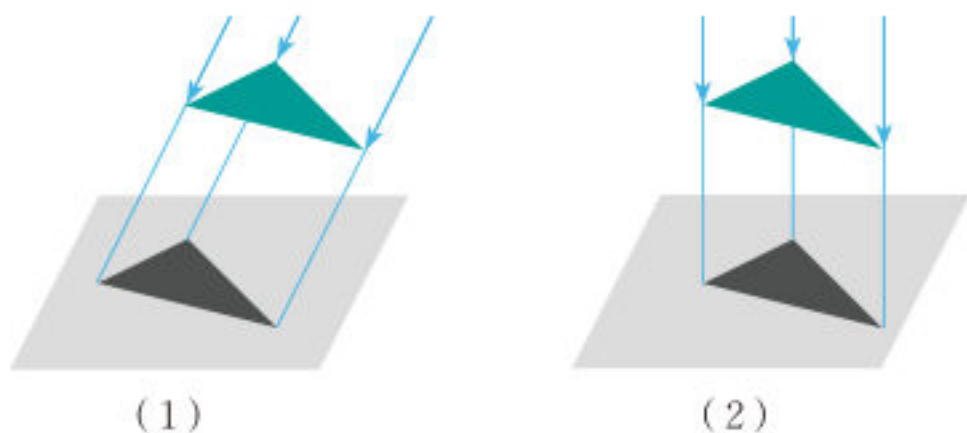


图 4-5

观察·交流

图 4-6 中的三幅图是某天上午不同时刻在我国某地的同一位置拍摄的。



图 4-6

(1) 在三个不同时刻，同一棵树的影子长度不同，请将这三幅图按拍摄的先后顺序进行排列，并说明理由。

(2) 在同一时刻, 两棵树影子的长度与它们的高度之间有什么关系? 与同伴进行交流。

例2 某校墙边有甲、乙两根立柱, 已知乙立柱的高度为 1.5 m 。

(1) 某一时刻甲立柱在太阳光下的影子如图 4-7 所示。请画出此时乙立柱的影子。

(2) 在图 4-7 中, 当乙立柱移动到什么位置时, 其影子刚好不落在墙上? 请画出此时乙立柱的位置和影子。

(3) 在 (2) 的情形下, 如果测得甲、乙立柱的影子长分别为 1.24 m 和 1 m , 那么甲立柱的高度是多少?

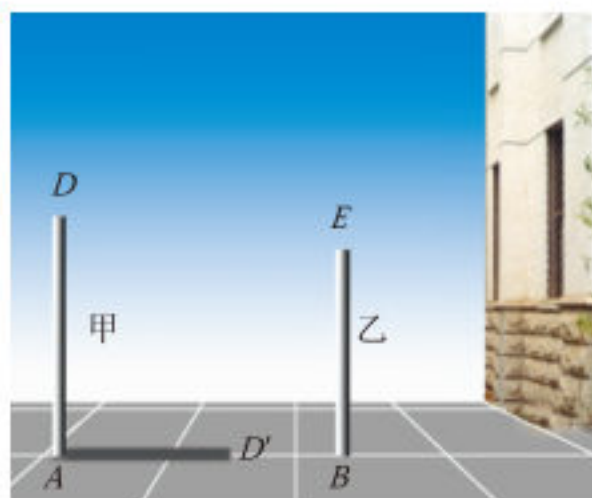


图 4-7

解: (1) 如图 4-8, 连接 DD' , 过点 E 作 DD' 的平行线, 交 AD' 所在的直线于点 E' 。 BE' 就是乙立柱的影子。

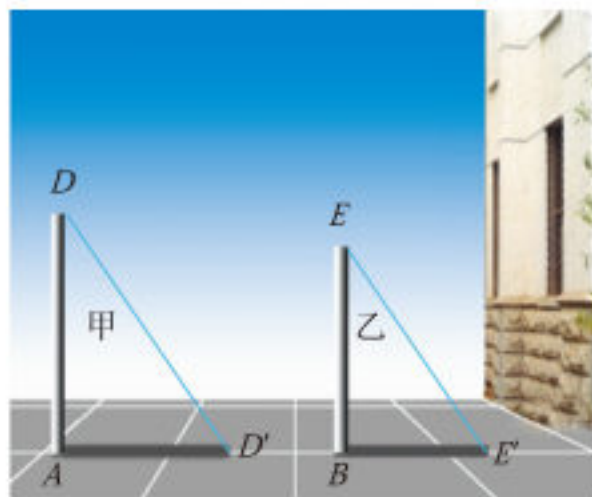


图 4-8

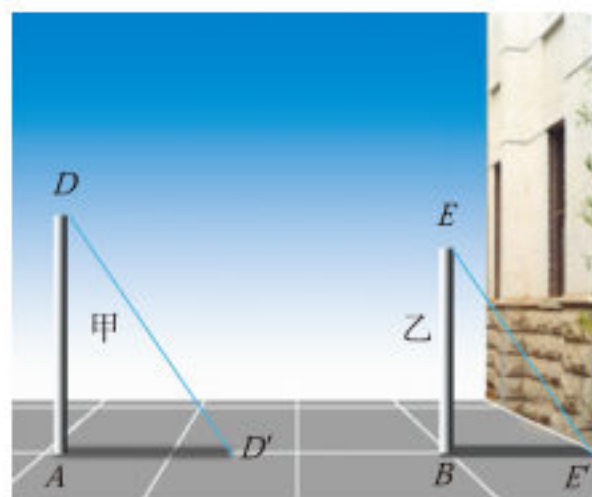


图 4-9

(2) 如图 4-9, 将乙立柱移动到与墙之间的距离为 BE' 的地方, 其影子刚

好不落在墙上。

(3) 因为 $\triangle ADD' \sim \triangle BEE'$, 所以 $\frac{AD}{BE} = \frac{AD'}{BE'}$, 即 $\frac{AD}{1.5} = \frac{1.24}{1}$ 。

所以, 甲立柱的高度为 $AD = \frac{1.5 \times 1.24}{1} = 1.86$ (m)。

操作·交流

(1) 两棵小树在同一时刻的影子如图 4-10 所示, 请在图中画出形成树影的光线。它们是太阳的光线还是灯光的光线? 与同伴进行交流。



图 4-10

(2) 图 4-11 中的影子是在太阳光下形成的还是在灯光下形成的? 画出同一时刻立柱的影子 (用线段表示), 并与同伴交流这样做的理由。

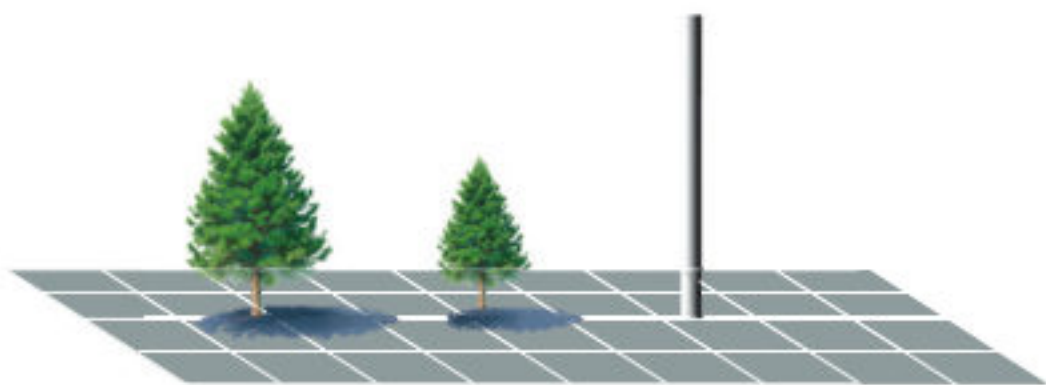


图 4-11

思考·交流

请举例说明在太阳光、灯光照射下, 物体在地面上的影子的不同特征, 并与同伴进行交流。

随堂练习

1. 甲、乙两根木杆竖直地立在地面上，其中甲木杆的高度为 3 m，乙木杆的高度为 2 m。在某一时刻，甲木杆在太阳光下的影子如图所示，请在图中画出此时乙木杆在太阳光下的影子。



(第1题)

阅读·思考

日 晷

“晷”字的古义是“太阳的影子”。日晷是古代一种利用太阳投射的影子来测定时刻的装置。如图 4-12，日晷由晷针和刻有时刻线的晷面组成。

当太阳光照在日晷上时，晷针的影子就会投向晷面。太阳由东向西移动，投向晷面的晷针的影子也慢慢地由西向东转动。转动着的晷针影子就像现代钟表的指针，晷面就像现代钟表的表面，白天天气晴朗时，人们都能从晷针的影子得到时刻的读数。

请查阅资料或实地走访，了解更多有关日晷的历史和原理。



图 4-12

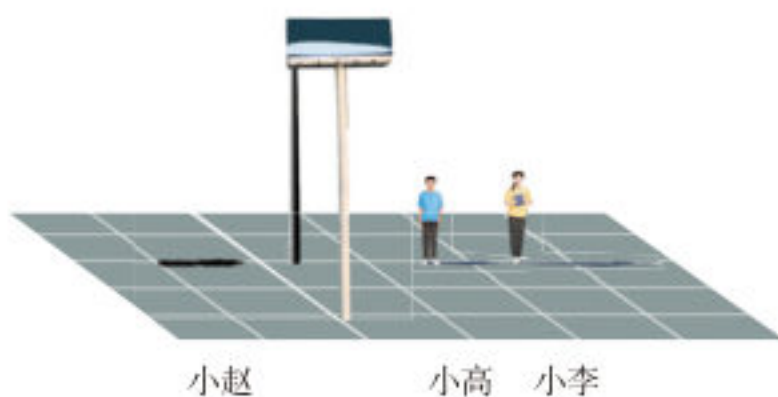


习题4.1

> 知识技能

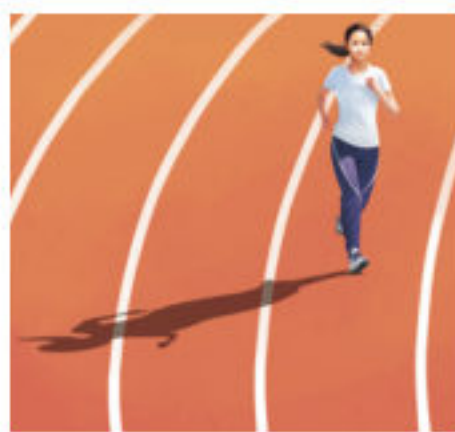
1. 如图，一个广告牌挡住了路灯的灯泡。

- (1) 确定图中路灯灯泡所在的位置；
- (2) 在图中画出表示小赵身高的线段。

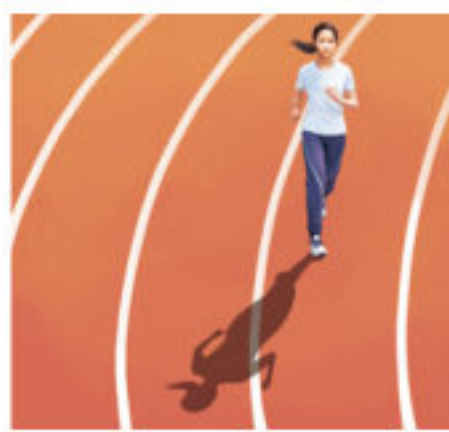


(第1题)

2. 一天下午，秦老师先参加了校运动会女子 200 m 比赛，然后又参加了女子 400 m 比赛，摄影师在同一位置拍摄了她参加这两场比赛的照片（如图）。你认为秦老师参加 400 m 比赛的照片是哪一张？为什么？



(1)



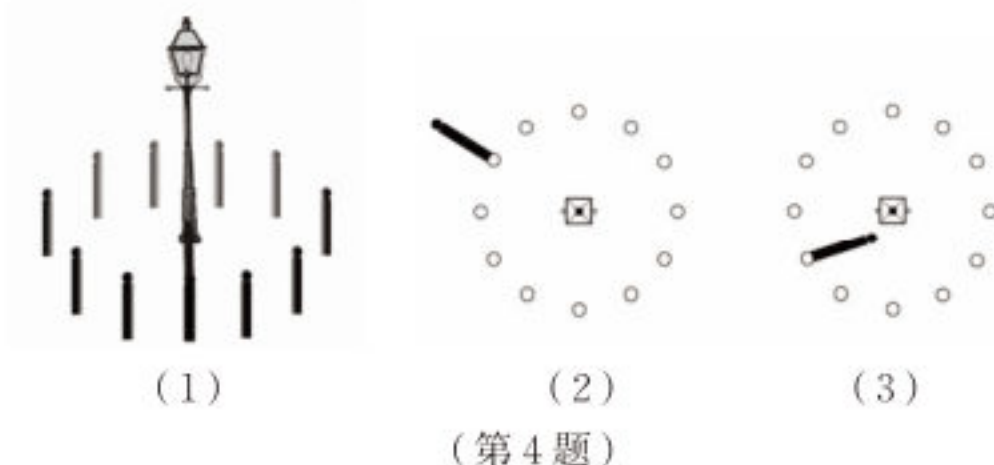
(2)

(第2题)

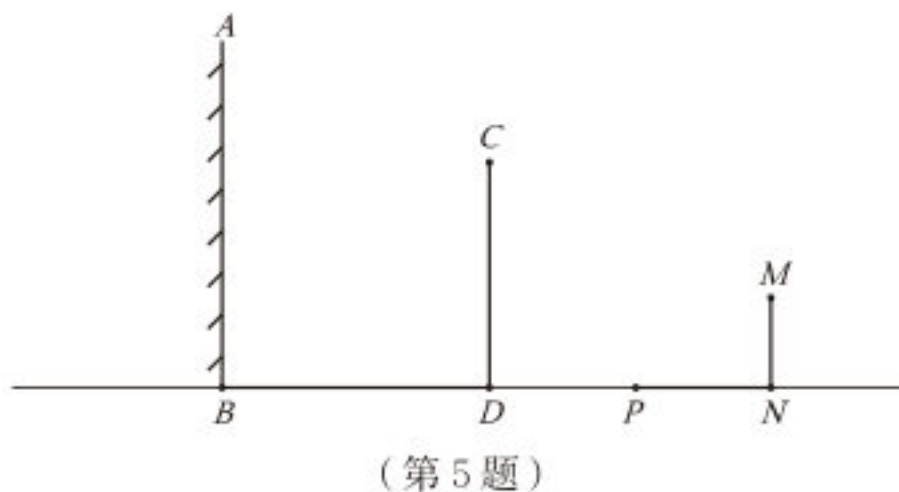
> 数学理解

3. 一个人在路灯下走动，他在这盏路灯下的影子的长度与他到这盏路灯所在位置的有什么关系？

4. 如图(1), 中间是一盏路灯, 周围有一圈栏杆, 图(2)(3)表示的是这些栏杆的影子, 但没有画完。请你把图(2)(3)补充完整。



5. 如图, 在校园一面围墙 AB 前有路灯杆 CD 。小明在太阳光下借助竹竿 MN 测量该路灯杆的高度, 线段 PN 表示竹竿在地面上的影子。
- (1) 请画出此刻路灯杆 CD 在太阳光下的影子;
- (2) 测得 $MN=1\text{ m}$, $PN=1.5\text{ m}$, 围墙与路灯杆之间的距离 $BD=3\text{ m}$, 路灯杆的影子落在围墙上的那部分的高度为 0.5 m , 求路灯杆 CD 的高度。



问题解决

6. 一个人站在一盏路灯下, 利用他在这盏路灯下的影子的长度可以估算出路灯灯泡的高度。请你设计一个估测方案。

7. 分组活动：选一个阳光明媚的日子，4人一组在校园内平坦的空地上立两根高度不同的木杆，分别在上午、中午、下午观察这两根木杆影子的方向，同时测量木杆的影长，并将有关结果填入下表。

时间	杆影方向	杆影长度	$\frac{\text{杆影长度}}{\text{木杆长度}}$

通过观察和测量，你发现了什么？

- ※8. 在太阳光下摆弄立方块，观察立方块在地面上的影子，你得到的影子分别是几边形？与同伴进行交流。

2 视 图

如图 4-13, 假设有一束平行光线从正面投射到图中的物体上, 你能想象出它在这束平行光线下的正投影吗? 把你想象的正投影画出来, 并与同伴进行交流。

如果平行光线从左面投射到图中的物体上, 结果又是怎样的? 如果平行光线从上面投射到图中的物体上呢?

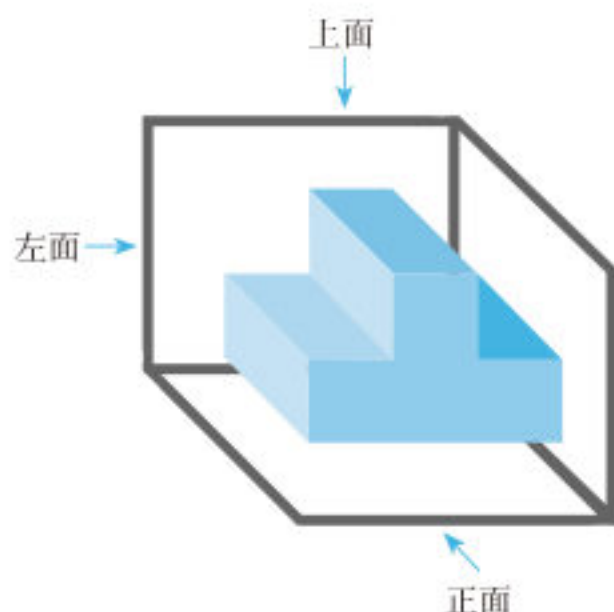


图 4-13

像这样, 用正投影的方法绘制的物体在投影面上的图形, 称为物体的**视图** (view)。

在实际生活和工程中, 人们常常从正面、左面和上面三个不同方向观察一个物体, 分别得到这个物体的三个视图, 这样大体上就把一个物体的形状特征用平面图形表示出来了。通常我们把从正面得到的视图叫作**主视图** (front view), 从左面得到的视图叫作**左视图** (left view), 从上面得到的视图叫作**俯视图** (planform view)。

例如, 图 4-13 中物体的主视图、左视图和俯视图如图 4-14 所示。

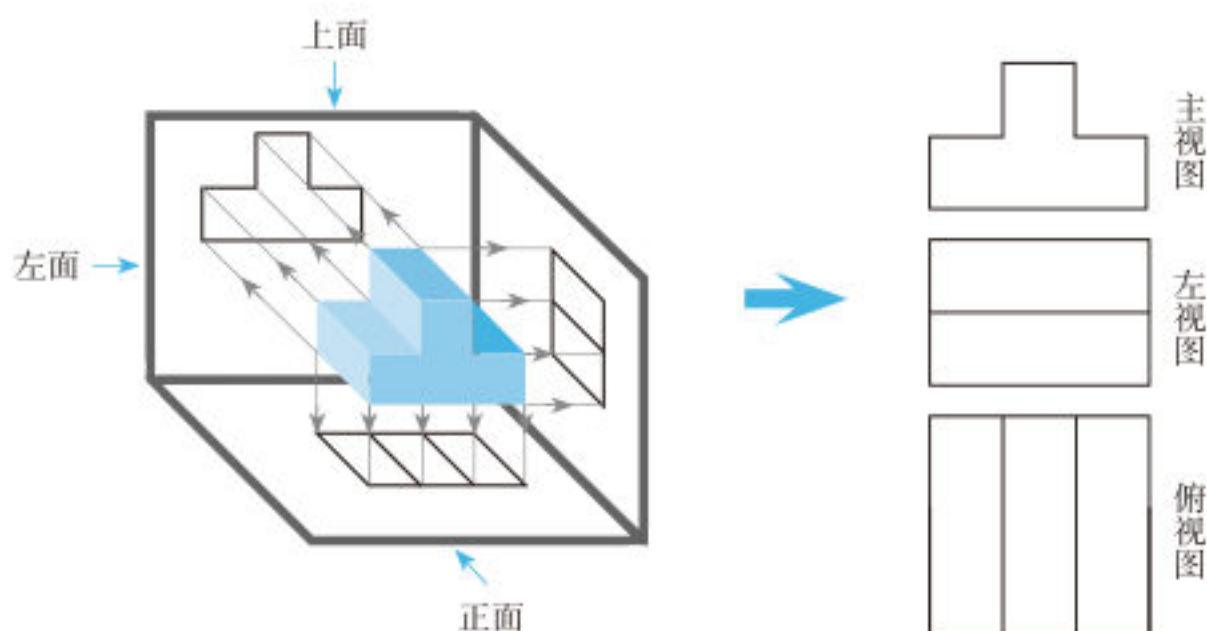


图 4-14

操作·交流

请在下表中画出圆柱、圆锥和球的三种视图，并与同伴进行交流。

几何体	主视图	左视图	俯视图
			
			
			

思考·交流

图 4-15 中是一个正三棱柱^❶。

(1) 你能想象出这个正三棱柱的主视图、左视图和俯视图吗？你能画出它们吗？

(2) 你所画的主视图与俯视图有哪些部分对应相等？主视图与左视图有哪些部分对应相等？左视图与俯视图呢？与同伴进行交流。



图 4-15

在三种视图中，主视图反映物体的长和高，俯视图反映物体的长和宽，左视图反映物体的高和宽。因此在画三种视图时，对应部分的长度要相等，而且通常把俯视图画在主视图下面，把左视图画在主视图右面。例如，图 4-15 所示正三棱柱的三种视图可以表示为图 4-16。

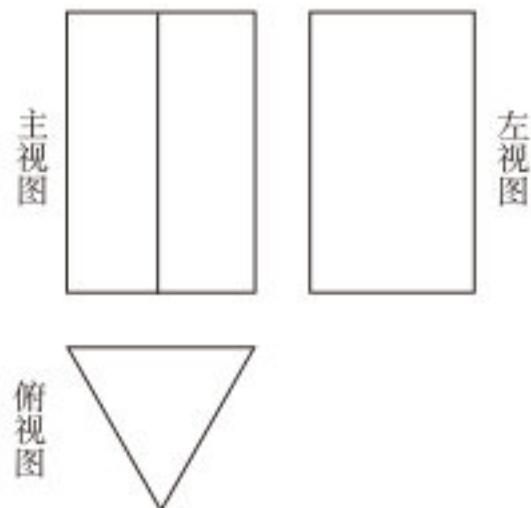


图 4-16

❶ 底面为正多边形的直棱柱称为正棱柱。

例 画出如图 4-17 所示的四棱柱的主视图、左视图和俯视图。

解：这个四棱柱的三种视图如图 4-18 所示。



图 4-17

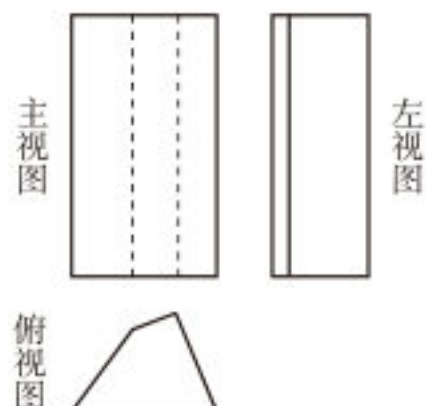


图 4-18

在画视图时，看得见部分的轮廓线要画成实线，看不见部分的轮廓线要画成虚线。

随堂练习

1. 找出图中每种物品所对应的主视图。



(1)



(2)



(3)



(4)



(A)



(B)



(C)



(D)

2. 图(1)是一个蒙古包的图片，小明认为这个蒙古包可以看成图(2)所示的几何体，请你帮小明画出这个几何体的主视图、左视图和俯视图。

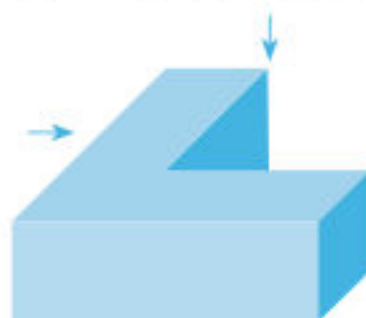


(1)



(2)

(第2题)



(第3题)

3. 画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。

两个三棱柱的底面均为等腰直角三角形，它们的俯视图分别如图 4-19 所示，画出它们的主视图和左视图。

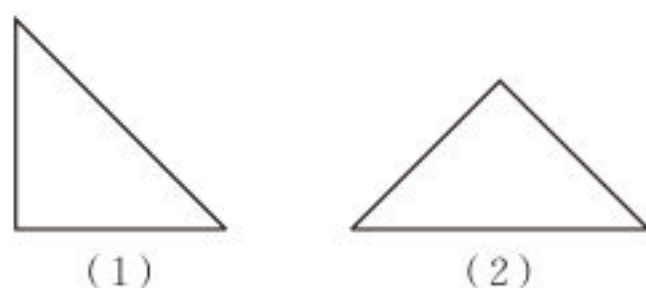


图 4-19

观察·思考

观察图 4-20 中的三种视图，你能在图 4-21 中找出与之对应的几何体吗？

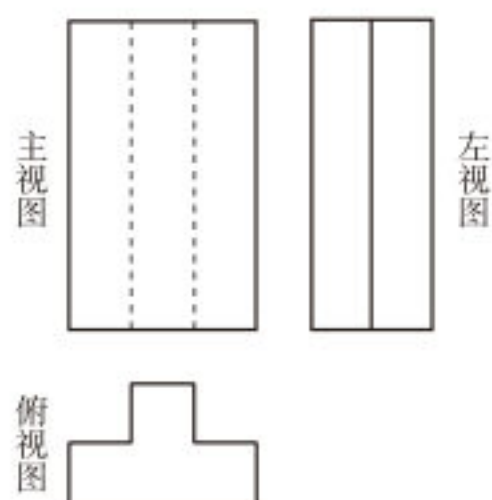


图 4-20

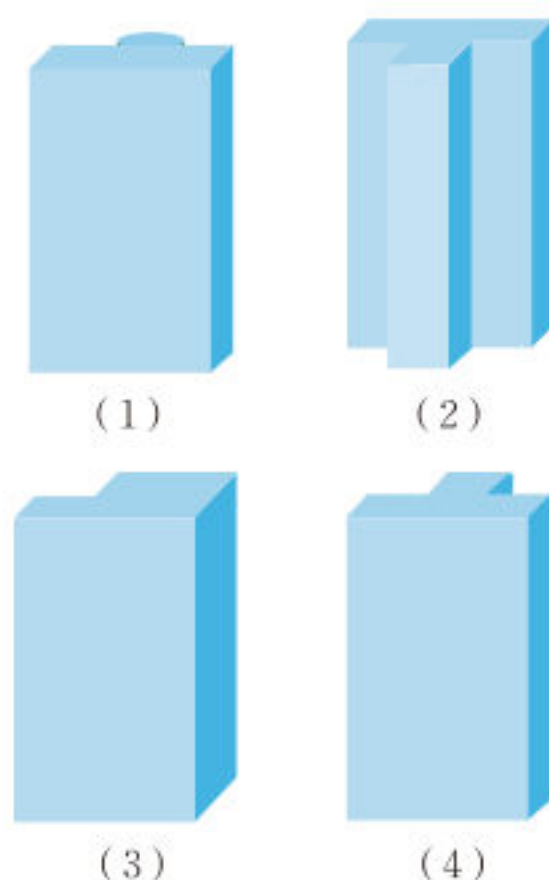


图 4-21

思考·交流

根据图 4-22 中的三种视图，你能想象出与之对应的几何体的形状吗？先独立思考，再与同伴进行交流。

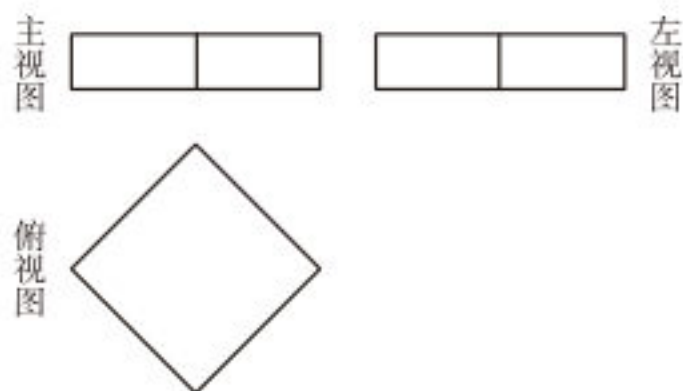


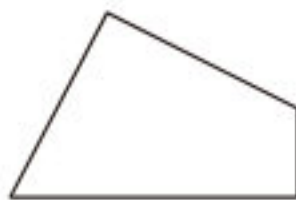
图 4-22

操作·交流

- (1) 想象一个几何体，并画出它的三种视图。
- (2) 请同伴根据你画出的三种视图描述这个几何体的形状。
- (3) 怎样由三种视图判断与之对应的几何体的形状特征？与同伴进行交流。

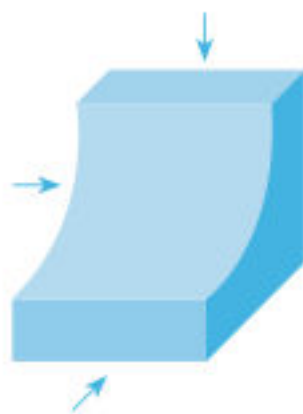
随堂练习

1. 已知某四棱柱的俯视图如图所示，画出它的主视图和左视图。

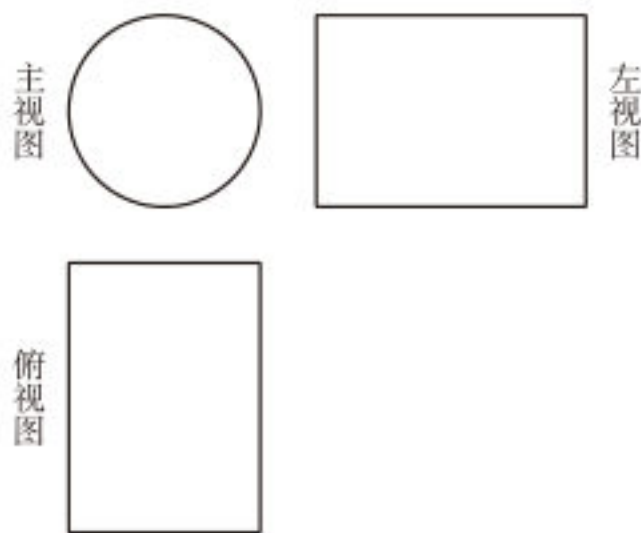


(第1题)

2. 画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。



(第2题)



(第3题)

3. 根据如图所示的三种视图，你能想象出与之对应的几何体的形状吗？请画出这个几何体的草图。



习题4.2

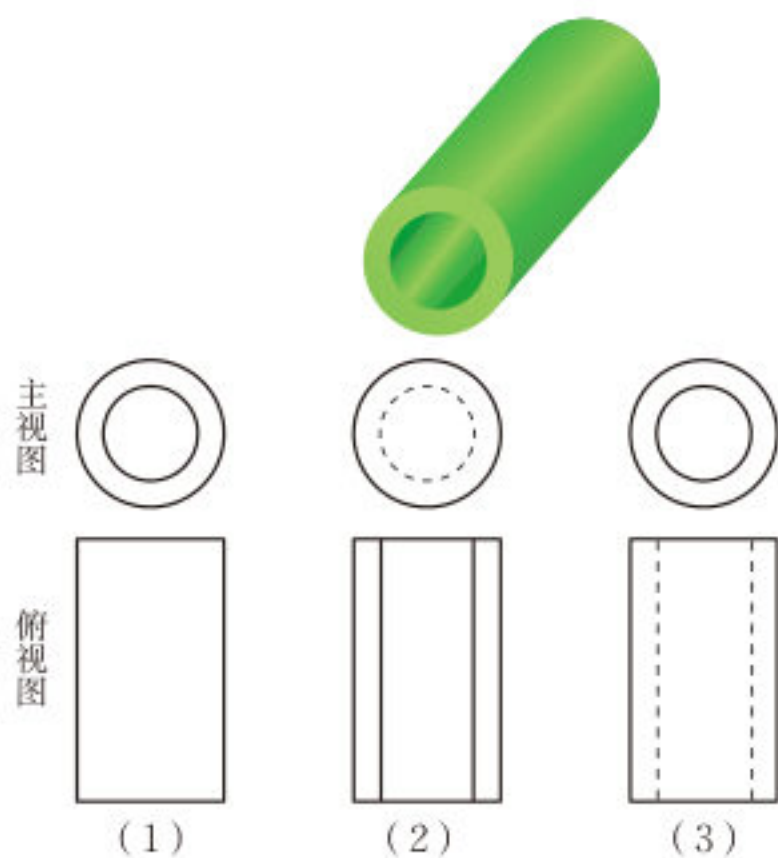
知识技能

- 画出图中各个几何体的主视图、左视图和俯视图；
 - 请找出一些与图中几何体形状类似的物体，并尝试画出它们的三种视图。

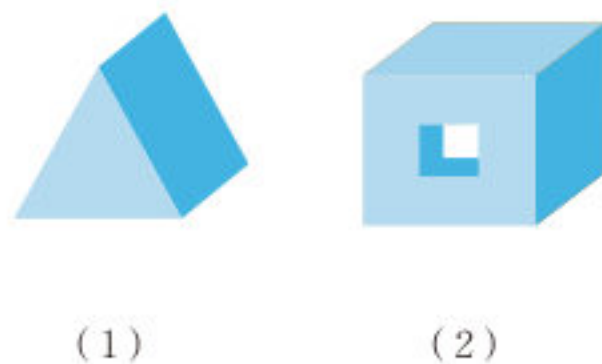


(第1题)

- 在如图所示的空心圆柱的两种视图中，哪些有错误？为什么？



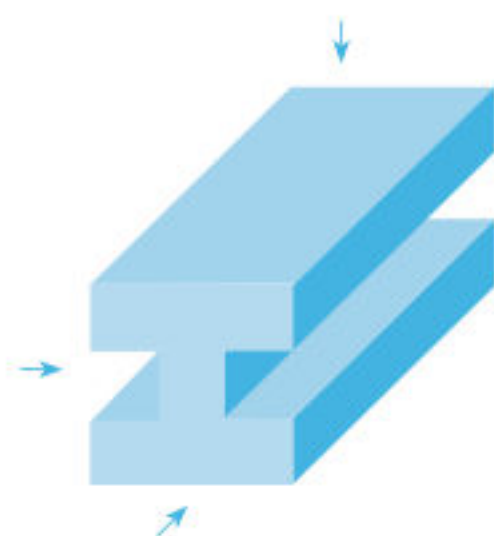
(第2题)



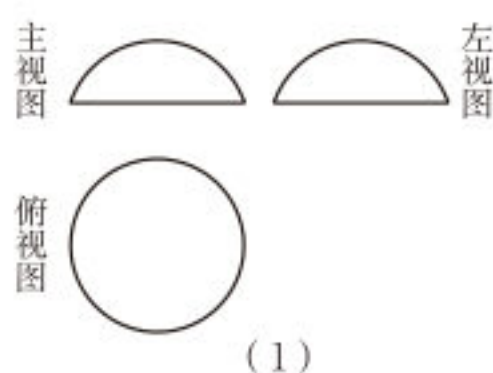
(第3题)

- 分别画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。

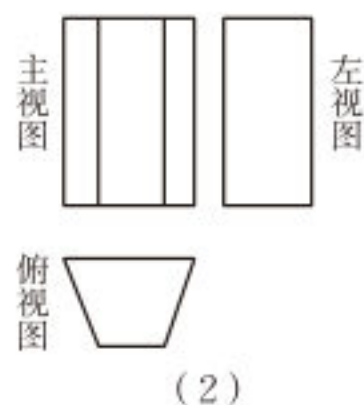
4. 画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。



(第4题)



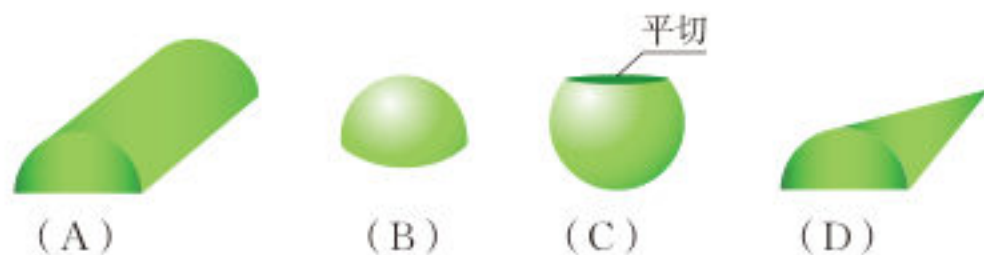
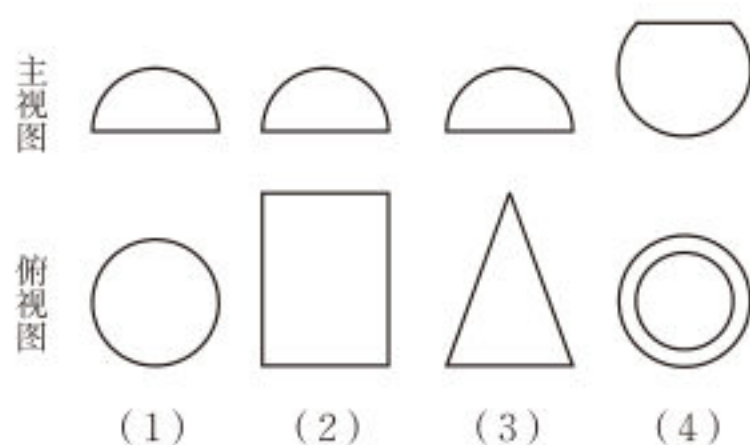
(第5题)



5. 根据如图所示的三种视图, 你能想象出与之对应的几何体的形状吗? 请分别画出这两个几何体的草图。

> 数学理解

6. 根据下列主视图和俯视图, 找出与之对应的几何体。

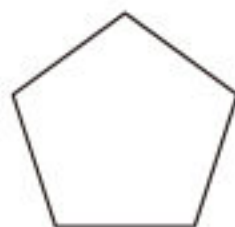


(第6题)

7. 画出图中正六棱柱的主视图、左视图和俯视图。



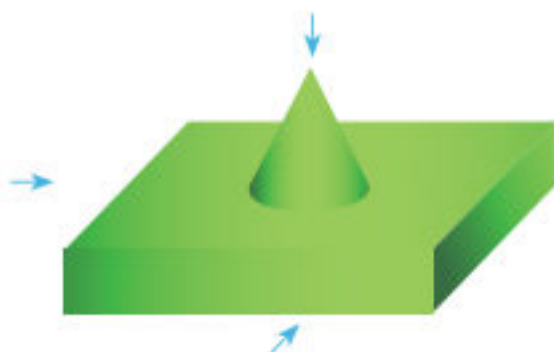
(第7题)



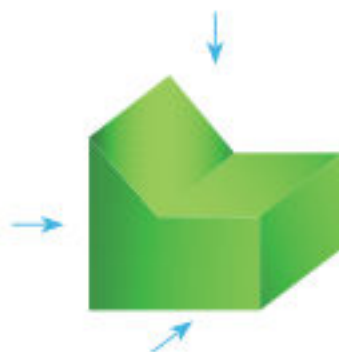
(第8题)

8. 一个正五棱柱的俯视图如图所示, 请你画出它的主视图和左视图。

9. 画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。



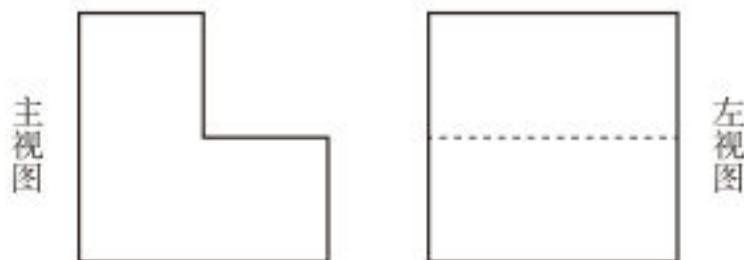
(第9题)



(第10题)

10. 画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。

※11. 一个几何体的主视图和左视图如图所示, 你能想象出与之对应的几何体的形状吗? 请画出这个几何体的草图, 结合草图画出它的俯视图, 并描述这个几何体的形状。



(第11题)



回顾与思考

1. 列举一些中心投影和平行投影的实例。
2. 你能找出主视图和左视图完全相同的几何体吗？你能找出三种视图完全相同的几何体吗？请各举两例。
3. 举例说明画几何体的三种视图要注意的问题。
4. 与同伴结对，互相提供视图，让对方根据所提供的视图描述相应几何体的形状。
5. 回顾投影与视图的学习过程，你在用平面图形刻画立体图形方面积累了哪些经验？
6. 梳理本章内容，用适当的方式呈现全章知识结构，并与同伴进行交流。



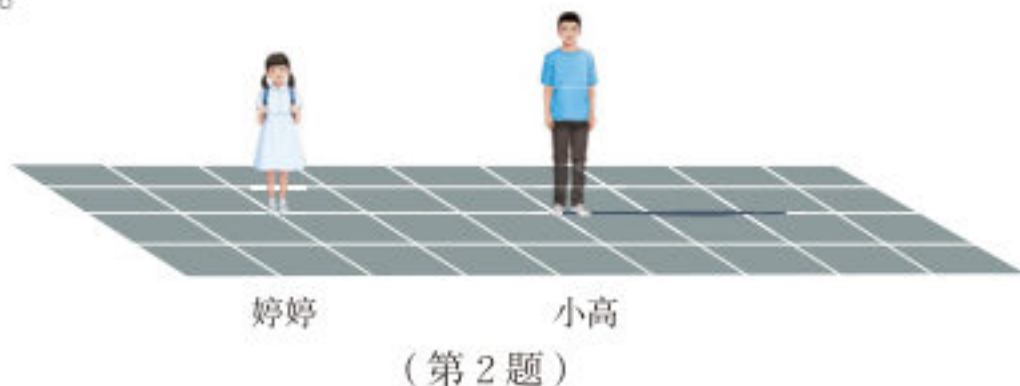
复习题

> 知识技能

1. 确定图中路灯灯泡的位置，并画出婷婷在这盏路灯下的影子（用线段表示）。



2. 小高在太阳光下的影子如图所示，请画出此时婷婷在太阳光下的影子（用线段表示）。



3. 如图，在一间黑屋子里用一盏灯照射一个球。

(1) 这个球在地面上的影子是什么形状？

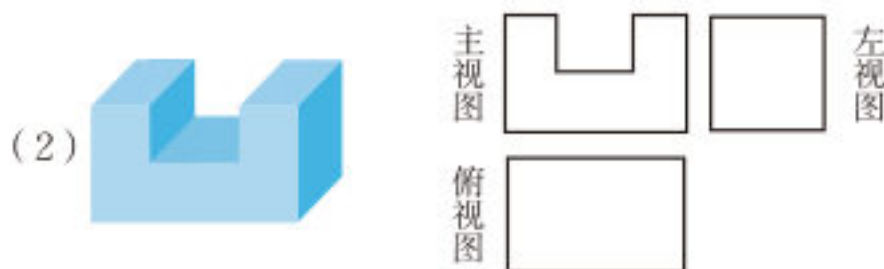
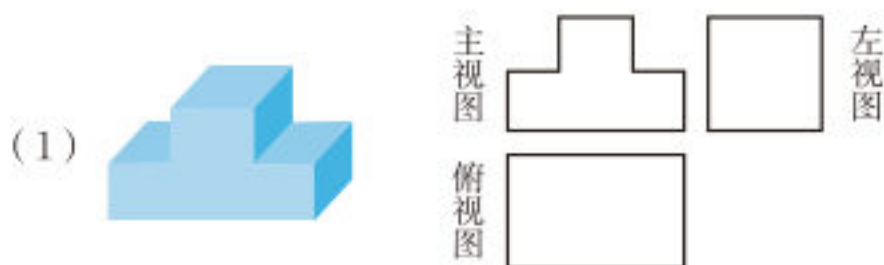
(2) 当球的位置变化时，影子的形状和大小会怎样变化？请你实际试一试！



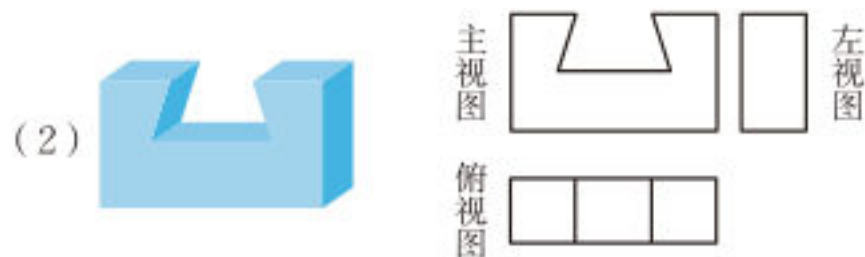
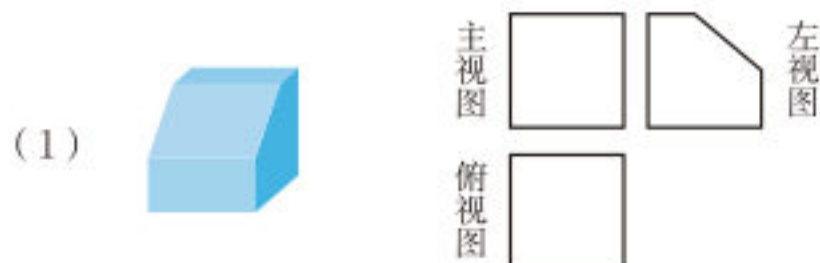
(第3题)

4. 在太阳光的照射下，球在地面上的影子是什么形状？当球的位置变化时，影子的形状和大小会发生变化吗？请你实际试一试！

5. 下列几何体的三种视图有没有错误（不考虑尺寸）？为什么？如果有错误，应该怎样改正？



6. 添线补全下列几何体的三种视图。



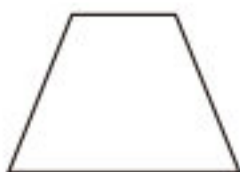
7. 补全下列几何体的三种视图。



8. 两个四棱柱的底面均为梯形，它们的俯视图分别如图所示，画出它们的主视图和左视图。



(1)



(2)

(第8题)



(1)



(2)



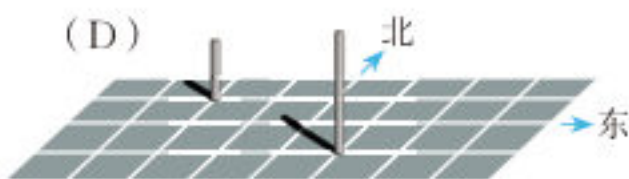
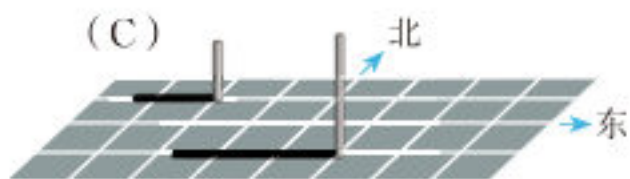
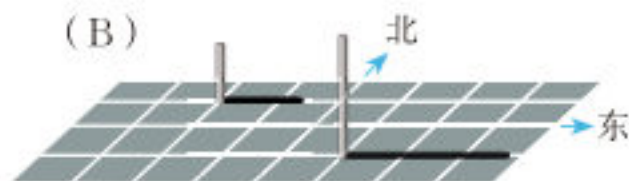
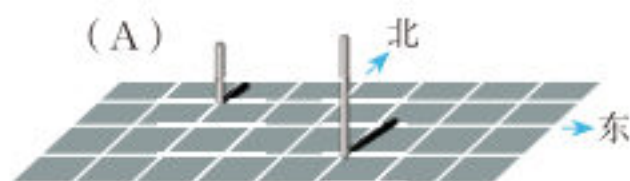
(3)

(第9题)

9. 画出图中几何体的主视图、左视图和俯视图。

> 数学理解

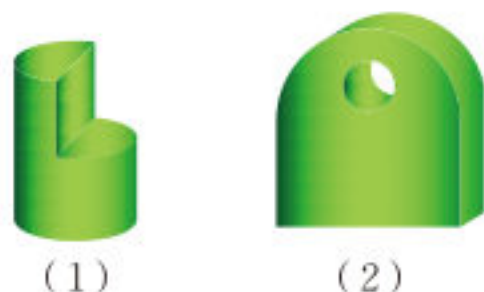
10. 两根立柱一天中四个不同时刻的影子如图所示，请将这四幅图按时间先后顺序进行排列，并说明理由。



(第10题)

11. 一盏路灯旁有一个广告牌，小明用如下方法测量这个广告牌的高度：先测量广告牌在这盏路灯下的影长，再找一根长度已知的竹竿，任意选定一个位置测量竹竿在这盏路灯下的影长，然后由“广告牌高度与其影长之比等于竹竿长与其影长之比”即可求出广告牌的高度。你觉得他的方法有道理吗？为什么？

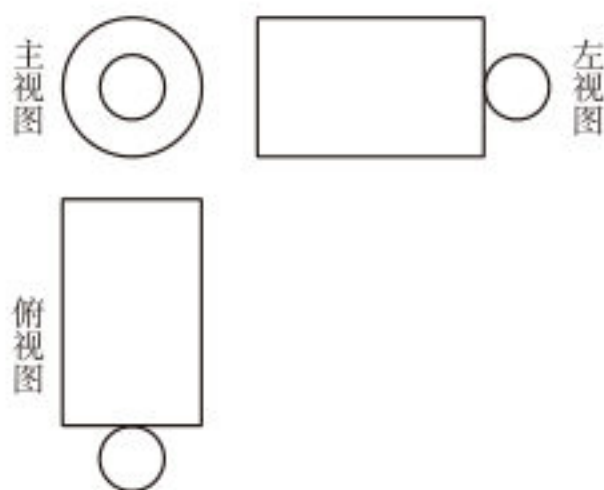
12. 画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。



(1)

(2)

(第12题)

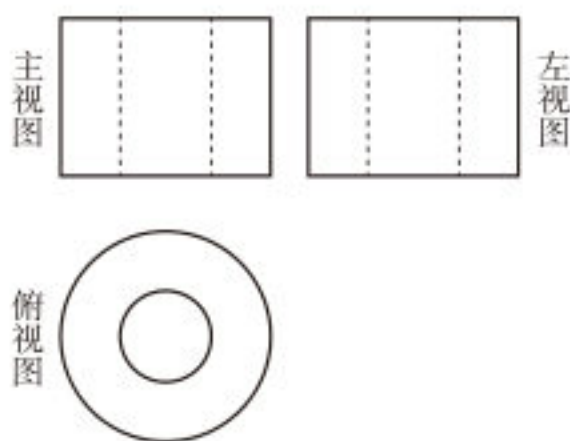


(第13题)

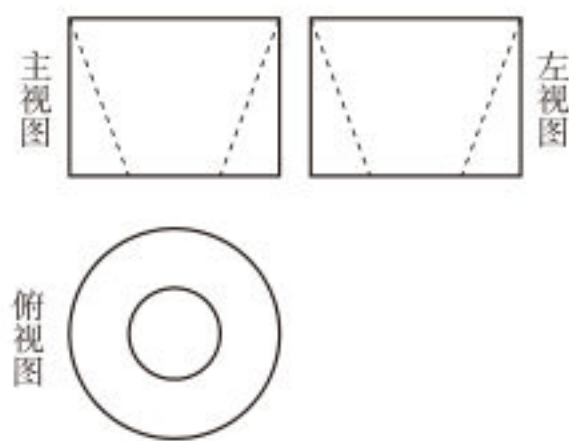
13. 根据如图所示的三种视图, 你能想象出与之对应的几何体的形状吗? 请画出这个几何体的草图。

问题解决

14. 分组设计并实施一个运用影子解决问题的活动, 撰写一份活动报告, 阐明活动的目的、要求、过程、结论及相关思考。
15. 两个几何体的三种视图如图所示, 你能想象出它们的形状吗? 请画出这两个几何体的草图。



(1)



(2)

(第15题)

联系拓广

16. 以“视图在生产生活中的应用”为主题, 制作一份手抄报, 并在班级内分享。

第五章

二次函数

节日的喷泉给人们带来喜庆，夏日的喷泉给人们带来清凉。你是否注意到喷泉水流所经过的路线？在观看篮球比赛时，你是否注意到篮球入篮的路线？它们会与某种函数有联系吗？

本章将在一次函数的基础上继续认识二次函数，你将体会二次函数的意义，描绘二次函数的图象，发现二次函数的性质，利用二次函数解决一些实际问题，进一步发展抽象能力、几何直观、模型观念等，不断增强应用意识。



在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：



- 💡 二次函数所刻画的变量之间的关系具有怎样的特征？
- 💡 研究函数一般会经历怎样的过程？研究二次函数的方法有哪些特点？

1

认识二次函数

某果园有 100 棵橙子树，平均每棵树结 600 个橙子。现准备多种一些橙子树以提高总产量，但如果多种树，树与树之间的距离和每一棵树所接受的阳光就会减少。根据经验估计，每多种一棵树，平均每棵树就会少结 5 个橙子。

(1) 问题中有哪些变量？其中哪些是自变量，哪些是因变量？

(2) 假设果园增种 x 棵橙子树，那么果园共有多少棵橙子树？这时平均每棵树结多少个橙子？

(3) 如果果园橙子的总产量为 y 个，那么 y 与 x 之间的关系式是什么？ x 能取哪些值？

尝试·思考

(1) 某公司今年 4 月的利润为 20 万元，预计 5~6 月的利润将持续增长。如果设该公司今年 5 月、6 月利润的月均增长率为 x ，6 月的利润为 y 万元，那么 y 与 x 之间的关系式是什么？ x 能取哪些值？

(2) 已知矩形的周长为 40 cm，它的面积可能是 100 cm^2 吗？可能是 75 cm^2 吗？还可能是多少？如果设这个矩形的一条边长为 $x\text{ cm}$ ，面积为 $y\text{ cm}^2$ ，那么 y 与 x 之间的关系式是什么？ x 能取哪些值？

(3) 两个数的和是 20，设其中一个数是 x ，这两个数的积是 y ，那么 y 与 x 之间的关系式是什么？ x 能取哪些值？

观察·交流

观察由上述问题得到的关系式： $y = -5x^2 + 100x + 60\,000$ ， $y = 20x^2 + 40x + 20$ ， $y = -x^2 + 20x$ ，它们有什么共同特征？与同伴进行交流。

一般地，如果两个变量 x ， y 之间的对应关系可以表示成 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 的形式，那么称 y 是 x 的二次函数 (quadratic function)。

随堂练习

1. 下列函数中 (x, t 是自变量), 哪些是二次函数?

$$y = -\frac{1}{2} + 3x^2, y = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 25, y = 2^2 + 2x, s = 1 + t + 5t^2.$$

2. 写出等边三角形的面积 S 与其边长 a 之间的关系式, 并分别计算当 $a = 1, \sqrt{3}, 2$ 时三角形的面积。



习题5.1

> 知识技能

1. 小球在某个斜坡上由静止开始向下滚动, 它在斜坡上滚动的路程 s (单位: m) 与滚动的时间 t (单位: s) 之间的关系是 $s = 0.2t^2$ 。
- (1) 当滚动的时间为 2 s 时, 小球在斜坡上滚动的路程是多少?
- (2) 若斜坡长 5 m, 则小球何时到达斜坡底部?

> 数学理解

2. 举出一个生活中有关二次函数的例子。

> 问题解决

3. 某工厂计划为一批长方体形状的产品表面涂上油漆, 长方体的长和宽相等, 高比长多 0.5 m, 长方体的长和宽用 x (单位: m) 表示。
- (1) 长方体的表面积 S (单位: m^2) 与 x 之间的关系式是什么?
- (2) 如果每平方米涂漆所需要的费用是 5 元, 每个长方体所需涂漆费用用 y (单位: 元) 表示, 那么 y 与 x 之间的关系式是什么?
4. 2023 年, 我国全年完成造林面积 400 万 hm^2 ; 2024 年, 我国全年完成造林面积比 2023 年增长约 11.3%。

- (1) 2024 年,我国全年完成造林面积大约是多少(结果精确到 1 万 hm^2)?
- (2) 如果 2025 年、2026 年我国全年完成造林面积年均增长率为 x , 2026 年我国全年完成造林面积为 y 万 hm^2 , 那么 y 的表达式是什么?

2

二次函数的图象

与一次函数的学习过程类似，认识了二次函数的概念后，接下来要研究二次函数的图象和性质。借助图象直观了解函数的性质，是研究函数的重要方法。

二次函数的图象会是什么样子？你打算按照什么思路展开研究呢？

让我们从最特殊的二次函数 $y=x^2$ 开始研究吧！

画二次函数 $y=x^2$ 的图象。

(1) 观察表达式 $y=x^2$ ，你认为 x 可以取哪些值？与同伴进行交流。选择适当的 x 值，并计算相应的 y 值，完成下表。

x							
$y=x^2$							

(2) 在平面直角坐标系中描点，如果需要，可再多描一些点。

(3) 用光滑的曲线连接各点，便得到函数 $y=x^2$ 的图象。

先想象一下图象的大致形状，再画一画。

观察·思考

观察二次函数 $y=x^2$ 的图象。

- (1) 你能描述图象的特征吗？
- (2) 图象与 x 轴有交点吗？如果有，交点坐标是什么？
- (3) 当 $x < 0$ 时，随着 x 值的增大， y 的值如何变化？当 $x > 0$ 时呢？
- (4) y 的值可能小于 0 吗？当 x 取什么值时， y 的值最小？
- (5) 图象是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？请你找出几对对称点。

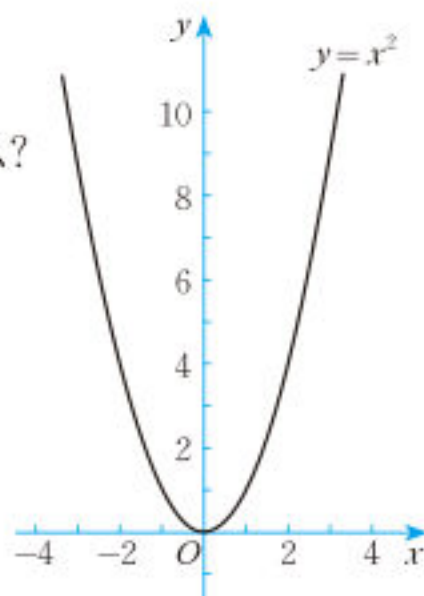


图 5-1

如图 5-1，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条抛物线 (parabola)，它的开口向上，

且关于 y 轴对称。对称轴与抛物线的交点是抛物线的顶点，它是图象的最低点。

二次函数 $y = x^2$ 的图象也称为抛物线 $y = x^2$ 。

思考·交流

二次函数 $y = -x^2$ 的图象是什么形状？先想一想，然后画出它的图象。它与二次函数 $y = x^2$ 的图象有什么关系？与同伴进行交流。

随堂练习

1. 在二次函数 $y = x^2$ 的图象上任取一点 $P(x_0, x_0^2)$ ，请写出点 P 关于 y 轴对称的点 P' 的坐标，并说明点 P' 在二次函数 $y = x^2$ 的图象上。

我们已经研究了特殊的二次函数 $y = x^2$ 和 $y = -x^2$ 的图象，那么二次函数 $y = ax^2$ 的图象是什么样子呢？先想象一下，再画一画。

画二次函数 $y = 2x^2$ 的图象。

(1) 完成下表。

x							
$y = 2x^2$							

(2) 在图 5-2 中画出二次函数 $y = 2x^2$ 的图象。

(3) 二次函数 $y = 2x^2$ 的图象是什么形状？它与二次函数 $y = x^2$ 的图象有什么相同之处和不同之处？它的开口方向、对称轴和顶点坐标分别是什么？

操作·思考

(1) 在图 5-2 中画出二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象，它与二次函数 $y = x^2$ ， $y = 2x^2$ 的图象有什么相同之处和不同之处？

(2) 如何画二次函数 $y = -2x^2$ 和 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象？先想一想，再画一画。

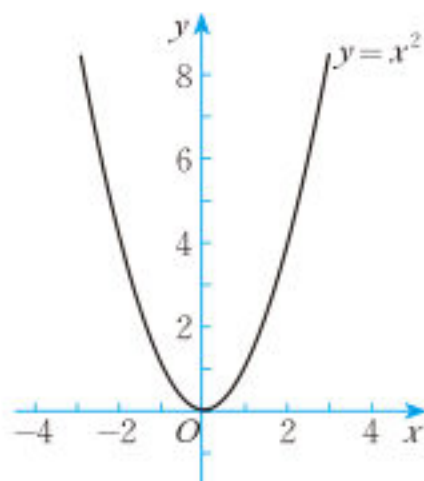


图 5-2

思考·交流

二次函数 $y = ax^2$ 的图象是什么形状？其中的系数 a 对图象有什么影响？与同伴进行交流。

二次函数 $y = ax^2$ 的图象是一条抛物线。当 $a > 0$ 时，它的开口向上；当 $a < 0$ 时，它的开口向下。

随堂练习

1. 画出二次函数 $y = 5x^2$ 的图象，并填空：

(1) 图象的对称轴是 _____，对称轴与图象的交点是 _____。

(2) 图象的开口向 _____。

(3) 图象在对称轴左边的部分，函数值随着自变量取值的增大而 _____；图象在对称轴右边的部分，函数值随着自变量取值的增大而 _____。

2. 画出二次函数 $y = 2x^2 + 1$ 的图象，它与二次函数 $y = 2x^2$ 的图象有什么关系？

二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象有什么特征？它与二次函数 $y = ax^2$ 的图象有什么关系？比如，二次函数 $y = 2(x-1)^2$ 的图象与二次函数 $y = 2x^2$ 的图象有什么关系？

画二次函数 $y = 2(x-1)^2$ 的图象。

(1) 完成下表，你能发现 $2(x-1)^2$ 与 $2x^2$ 的值有什么关系？

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y = 2x^2$	...										...
$y = 2(x-1)^2$	...										...

(2) 在图 5-3 中, 画出二次函数 $y = 2(x-1)^2$ 的图象。你是怎么画的? 与同伴进行交流。

(3) 二次函数 $y = 2(x-1)^2$ 的图象与二次函数 $y = 2x^2$ 的图象有什么关系? 它的开口方向、对称轴和顶点坐标分别是什么?

(4) 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而增大? 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而减小?

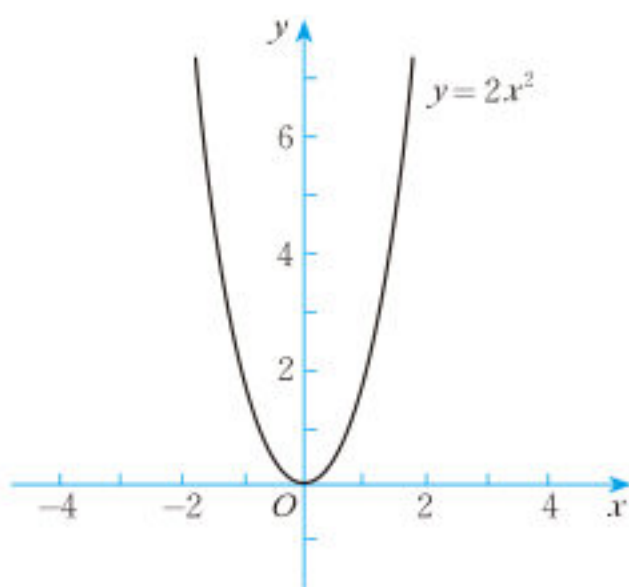


图 5-3

尝试·交流

(1) 画出二次函数 $y = 2(x-2)^2$ 的图象, 它与二次函数 $y = 2x^2$ 的图象有什么相同之处和不同之处?

(2) 你能由二次函数 $y = 2x^2$ 的图象分别得到二次函数 $y = 2(x+1)^2$ 和 $y = 2(x+2)^2$ 的图象吗? 你是怎么做的?

(3) 二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象是什么形状? 其中的 h 对图象有什么影响? 与同伴进行交流。

二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象是一条抛物线, 它的形状与二次函数 $y = ax^2$ 的图象形状相同, 只是位置不同。将二次函数 $y = ax^2$ 的图象左右平移, 就可以得到二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象。

随堂练习

1. 已知二次函数 $y = -3(x+2)^2$ 。

(1) 它的图象与二次函数 $y = -3x^2$ 的图象有什么关系?

(2) 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而增大? 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而减小?

二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象有什么特征？它与二次函数 $y = ax^2$ 的图象有什么关系？比如，二次函数 $y = 2(x-1)^2 + 3$ 的图象与二次函数 $y = 2x^2$ 的图象有什么关系？

思考·交流

(1) 二次函数 $y = 2(x-1)^2 + 3$ 的图象是什么样的？你能由二次函数 $y = 2x^2$ 的图象得到它吗？你是怎么得到的？

(2) 如何由二次函数 $y = 2x^2$ 的图象得到二次函数 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 的图象呢？

(3) 一般地，二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象与二次函数 $y = ax^2$ 的图象有什么关系？与同伴进行交流。

一般地，平移二次函数 $y = ax^2$ 的图象就可以得到二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象。因此，二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象是一条抛物线，它的开口方向、对称轴和顶点坐标见下表：

二次函数	图象特征		
	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y = a(x-h)^2 + k$	向上 ($a > 0$)	直线 $x = h$	(h, k)
	向下 ($a < 0$)		

尝试·思考

我们已经认识了形如 $y = a(x-h)^2 + k$ 的二次函数的图象和性质，你能研究二次函数 $y = 2x^2 - 8x + 7$ 的图象和性质吗？请你试一试。

将 $y = 2x^2 - 8x + 7$ 的右边配方，得
 $y = 2x^2 - 8x + 7 = 2(x-2)^2 - 1$ 。

化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式噢！

如图 5-4, 我们可以先画出二次函数 $y = 2x^2$ 的图象, 然后将这个图象先向右平移 2 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度, 就得到二次函数 $y = 2x^2 - 8x + 7$ 的图象。

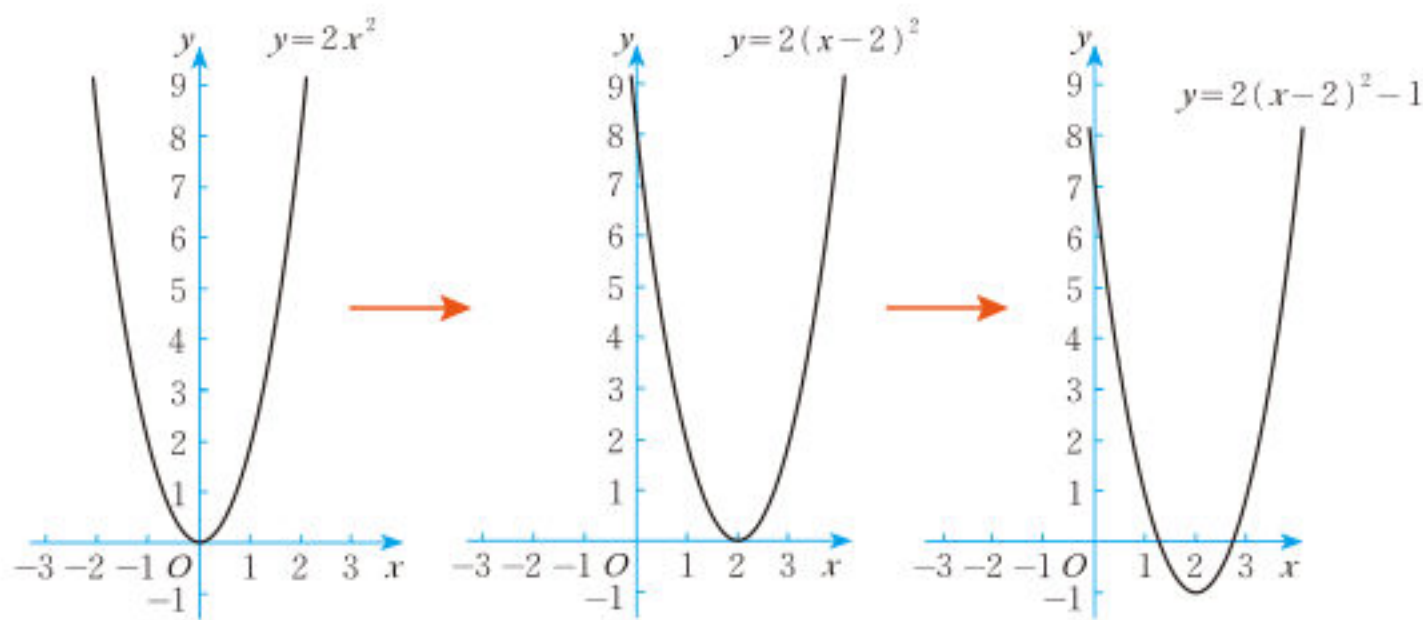


图 5-4

从图象可以看出: 当 $x < 2$ 时, y 的值随着 x 值的增大而减小; 当 $x > 2$ 时, y 的值随着 x 值的增大而增大; 当 $x = 2$ 时, y 的值最小, $y_{\text{最小}} = -1$ 。

操作·交流

确定下列二次函数图象的对称轴和顶点坐标, 并与同伴进行交流。

- (1) $y = 3x^2 - 6x + 7$; (2) $y = 2x^2 - 12x + 8$ 。

例 确定二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的对称轴和顶点坐标。

解: 把二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的右边配方, 得

$$\begin{aligned}
 y &= ax^2 + bx + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
 &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}。
 \end{aligned}$$

因此, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 。

回顾·反思

本节我们对二次函数图象和性质的研究经历了怎样的过程? 你积累了哪些经验?

随堂练习

1. 用配方法确定下列二次函数图象的对称轴和顶点坐标:

(1) $y = 2x^2 - 12x + 3$;

(2) $y = -5x^2 + 80x - 319$;

(3) $y = 2(x - \frac{1}{2})(x - 2)$;

(4) $y = 3(2x + 1)(2 - x)$ 。



习题5.2

> 知识技能

- 设正方形的边长为 a , 面积为 S , 试画出 S 随着 a 的变化而变化的图象。
- (1) 在同一平面直角坐标系中, 二次函数 $y = \frac{1}{3}x^2$ 的图象与二次函数 $y = 3x^2$ 的图象有什么相同之处和不同之处?
 - (2) 在同一平面直角坐标系中, 二次函数 $y = -3x^2$ 的图象与二次函数 $y = 3x^2$ 的图象有什么关系?
- 确定下列二次函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标, 必要时画草图进行验证。

(1) $y = -\frac{3}{4}x^2 - 1$;	(2) $y = -0.5(x + 1)^2$;
(3) $y = -\frac{3}{4}(x - 3)^2$;	(4) $y = 2(x - 2)^2 + 5$;
(5) $y = 2(x - 3)^2 - 5$;	(6) $y = 0.5(x + 4)^2 + 2$;
(7) $y = 2x^2 - 4x - 1$;	(8) $y = -3(x + 3)(x + 9)$ 。

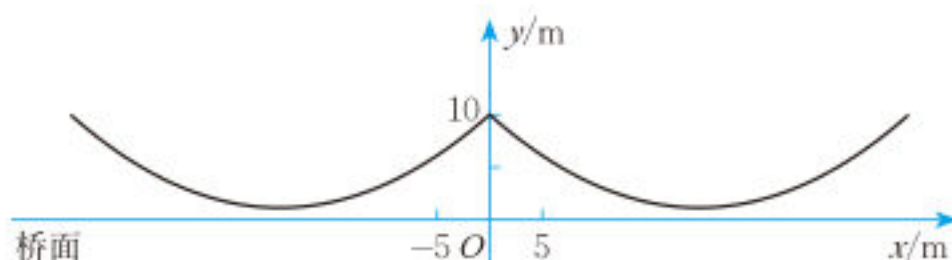
4. 在同一平面直角坐标系中, 二次函数 $y = -3(x - \frac{1}{2})^2$ 的图象与二次函数 $y = -3x^2$ 的图象有什么关系?

> 数学理解

5. 点 $A(2, 4)$ 在二次函数 $y = x^2$ 的图象上吗? 请分别写出点 A 关于 x 轴的对称点 B 的坐标、关于 y 轴的对称点 C 的坐标、关于原点 O 的对称点 D 的坐标。点 B, C, D 在二次函数 $y = x^2$ 的图象上吗? 在二次函数 $y = -x^2$ 的图象上吗?
6. 怎样由二次函数 $y = 2x^2$ 的图象得到二次函数 $y = 2(x - 1)^2 + 3$ 的图象? 对于二次函数 $y = 2(x - 1)^2 + 3$, 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而增大? 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而减小?
7. 分别写出符合下列条件的二次函数的表达式:
- (1) 两个函数的图象都不经过第三、第四象限;
 - (2) 两个函数的图象只有顶点坐标不同。
8. 将二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的图象先向上平移 2 个单位长度, 再向左平移 3 个单位长度, 得到抛物线 $y = x^2 + bx + c$, 求 b, c 的值, 并确定这条抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标, 必要时画草图进行验证。

> 问题解决

9. 某物体由静止竖直向上运动, 物体运动的高度 h (单位: m) 与运动的时间 t (单位: s) 之间的关系可以用公式 $h = -5t^2 + 150t + 10$ 表示。经过多长时间, 该物体到达最高点? 最高点的高度是多少?
10. 如图所示, 桥梁上两条钢缆的形状可以近似看成两条相同的抛物线, 而且左、右两条抛物线关于 y 轴对称。按照图中的平面直角坐标系, y 轴左侧的一条抛物线可以用 $y = \frac{9}{400}x^2 + \frac{9}{10}x + 10$ 表示。

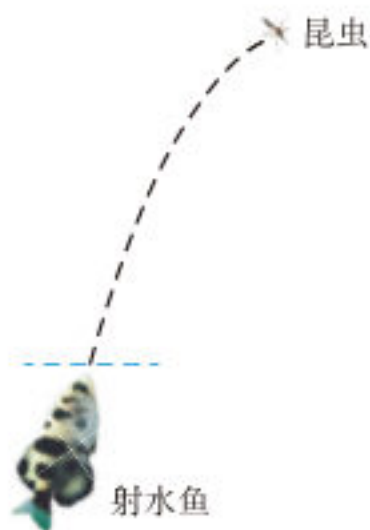


(第 10 题)

(1) 钢缆的最低点到桥面的距离是多少?

(2) 两条钢缆最低点之间的距离是多少?

11. 射水鱼以陆生昆虫为食。它在捕食时, 能从口中射出一股水流, 准确击中 2 m 以内的昆虫。如果不考虑空气阻力, 那么射水鱼射出的水流可以看成一条抛物线的一部分 (如图)。在一次捕食时, 射水鱼射出的水珠运动的高度 y (单位: cm) 与向前运动的水平距离 x (单位: cm) 之间的关系可以近似地表示为 $y = -0.1x^2 + 4x$ 。根据这一关系回答下列问题:



(第 11 题)

- (1) 如果这次射出的水流没有遇到障碍物, 那么当水珠向前运动的水平距离在什么范围时, 它运动的高度逐步上升? 当水珠向前运动的水平距离在什么范围时, 它运动的高度逐步下降? 水珠运动的最大高度是多少?
- (2) 假设要捕食的昆虫位于射水鱼正前方水平距离 20 cm、高度 50 cm 处, 那么这次射出的水流能否击中这只昆虫?

3

二次函数的应用

一名学生推铅球时，铅球运动的高度 y (单位: m) 是向前运动的水平距离 x (单位: m) 的二次函数，它们之间的关系如图 5-5 所示，其中 $(4, 3)$ 是图象的顶点，你能求出这个二次函数的表达式吗？

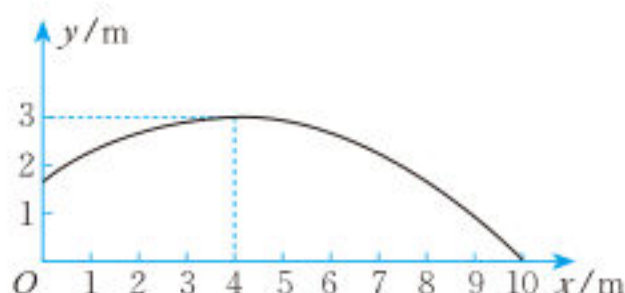


图 5-5

例1 如图 5-6，某球员在罚球线处投篮，球从点 A 处出手，恰好经过篮圈中心 B 。已知球出手的位置 A 到地面的距离为 2.25 m，到篮圈中心 B 的水平距离为 4 m，篮圈中心 B 到地面的距离为 3.05 m。建立如图所示的平面直角坐标系后，这位球员所投球的运动路线是抛物线 $y = ax^2 + c$ ($-3 \leq x \leq 1$)。求这条抛物线的表达式和球运动的最大高度。

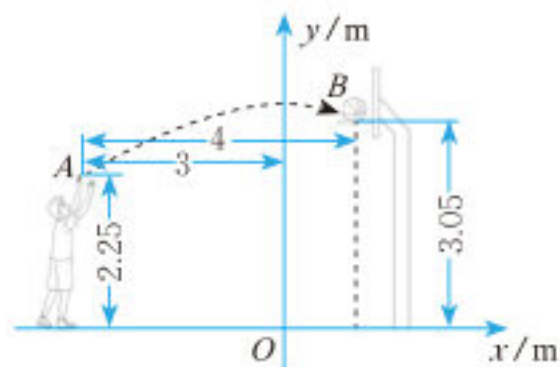


图 5-6

解：由题意可知，这条抛物线经过点 $A(-3, 2.25)$ ， $B(1, 3.05)$ 。将这两个点的坐标分别代入表达式 $y = ax^2 + c$ ，得

$$\begin{cases} 2.25 = 9a + c, \\ 3.05 = a + c. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a = -0.1, \\ c = 3.15. \end{cases}$$

所以，这条抛物线的表达式为 $y = -0.1x^2 + 3.15$ 。

当 $x = 0$ 时， y 取得最大值， $y_{\text{最大}} = 3.15$ 。

因此，球运动的最大高度是 3.15 m。

思考·交流

(1) 二次函数的图象与 y 轴交点的纵坐标为 1, 且经过点 $(2, 5)$ 和 $(-2, 13)$, 求这个二次函数的表达式。

(2) 确定二次函数的表达式需要几个条件? 与同伴进行交流。

随堂练习

1. 已知二次函数图象的顶点坐标是 $(-1, 1)$, 且经过点 $(1, -3)$, 求这个二次函数的表达式。
2. (1) 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(1, 1)$ 和 $(2, 3)$, 求这个二次函数的表达式;
(2) 请你更换第 (1) 题中的部分已知条件, 重新编制一道求二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 表达式的题目, 使所求得的二次函数表达式与第 (1) 题相同。

如图 5-7 (单位: m), 在一个直角三角形的内部作一个矩形 $ABCD$, 其中 AB 和 AD 分别在两条直角边上, 点 C 在斜边上。设 $AB = x$ m, 其中 $0 < x < 40$ 。

(1) 边 AD 的长度如何表示?

(2) 设矩形的面积为 $y \text{ m}^2$, 当 x 取什么值时, y 的值最大? 最大值是多少?

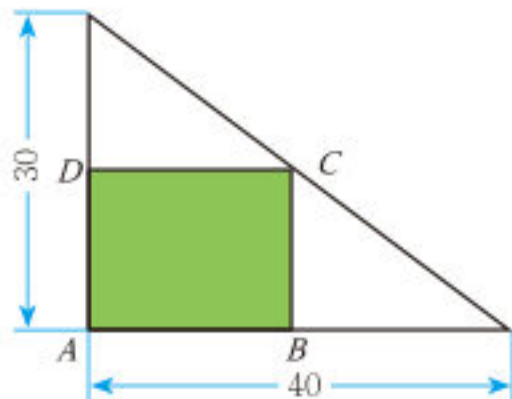


图 5-7

思考·交流

在上面的问题中，直角三角形不变，如果把矩形改为如图 5-8 所示的位置， BC 在斜边上，点 A, D 分别在两条直角边上，那么矩形 $ABCD$ 的最大面积是多少？你是怎样知道的？与同伴进行交流。

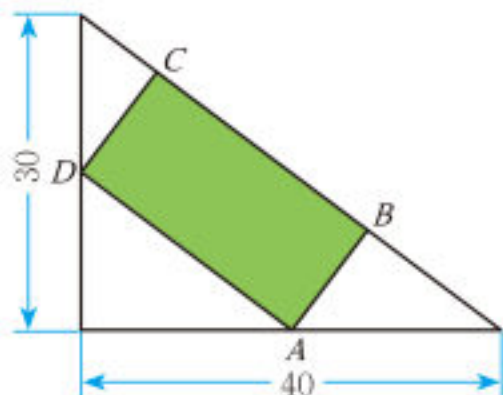


图 5-8

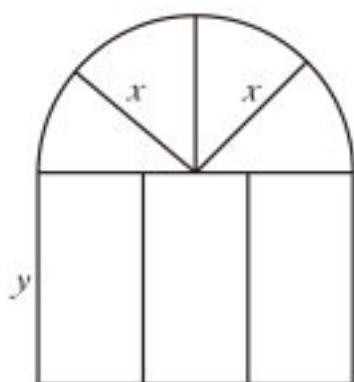


图 5-9

例2 某建筑物的窗户如图 5-9 所示（单位：m），它的上半部分是半圆，下半部分是矩形，制造窗框的材料总长（图中所有黑线的长度之和）为 15 m。不考虑材料的宽度及制造中的接口损耗，当 x 等于多少时，窗户的面积最大（结果精确到 0.01 m）？最大面积是多少（结果精确到 0.01 m^2 ）？

解：∵ $7x + 4y + \pi x = 15$,

$$\therefore y = \frac{15 - 7x - \pi x}{4}.$$

$$\because 0 < 7x + \pi x < 15,$$

$$\therefore 0 < x < 1.48.$$

设窗户的面积为 $S \text{ m}^2$ ，则

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \pi x^2 + 2xy \\ &= \frac{1}{2} \pi x^2 + 2x \cdot \frac{15 - 7x - \pi x}{4} \\ &= -\frac{7}{2}x^2 + \frac{15}{2}x \\ &= -\frac{7}{2}\left(x - \frac{15}{14}\right)^2 + \frac{225}{56}. \end{aligned}$$

∴ 当 $x = \frac{15}{14} \approx 1.07$ 时， S 取得最大值， $S_{\text{最大}} = \frac{225}{56} \approx 4.02$ 。

因此, 当 x 约为 1.07 时, 窗户的面积最大, 最大面积约为 4.02 m^2 。

随堂练习

1. 在图 5-7 的问题中, 如果设 $AD = x \text{ m}$, 其中 $0 < x < 30$, 那么如何求矩形 $ABCD$ 的最大面积?

服装厂生产某品牌的短袖上衣, 成本是每件 20 元。根据市场调查, 以 26 元的单价批发给经销商, 经销商愿意购进 5 000 件, 并且表示批发单价每降 0.5 元, 愿意多购进 500 件。为了获得最大利润, 该服装厂应将批发单价定为多少?

例3 某旅馆有客房 120 间, 当每间客房的日租金为 160 元时, 每天都客满。经市场调查发现, 每间客房的日租金增加 10 元, 每天客房出租数就会减少 6 间。如果不考虑其他因素, 那么该旅馆将每间客房的日租金增加到多少元时, 客房日租金的总收入最高? 最高总收入是多少?

解: 设每间客房的日租金增加 $10x$ 元, 客房日租金的总收入为 y 元, 则每天客房出租数减少 $6x$ 间,

$$\begin{aligned} y &= (160 + 10x)(120 - 6x) \\ &= -60(x - 2)^2 + 19\,440. \end{aligned}$$

$$\because x \geq 0, \text{ 且 } 120 - 6x > 0,$$

$$\therefore 0 \leq x < 20.$$

当 $x = 2$ 时, y 取得最大值, $y_{\text{最大}} = 19\,440$,

$$160 + 10x = 160 + 10 \times 2 = 180.$$

因此, 每间客房的日租金增加到 180 元时, 客房日租金的总收入最高, 最高总收入为 19 440 元。

尝试·思考

还记得本章一开始的“种多少棵橙子树”的问题吗? 我们得到橙子的总产量 y (单位: 个) 与增种橙子树的数量 x (单位: 棵) 之间的关系式

$$y = (600 - 5x)(100 + x) \\ = -5x^2 + 100x + 60\,000.$$

(1) 在图 5-10 中画出这个函数的图象, 并描述橙子的总产量与增种橙子树的棵数之间的关系。

(2) 增种多少棵橙子树, 可以使橙子的总产量在 60 400 个以上?

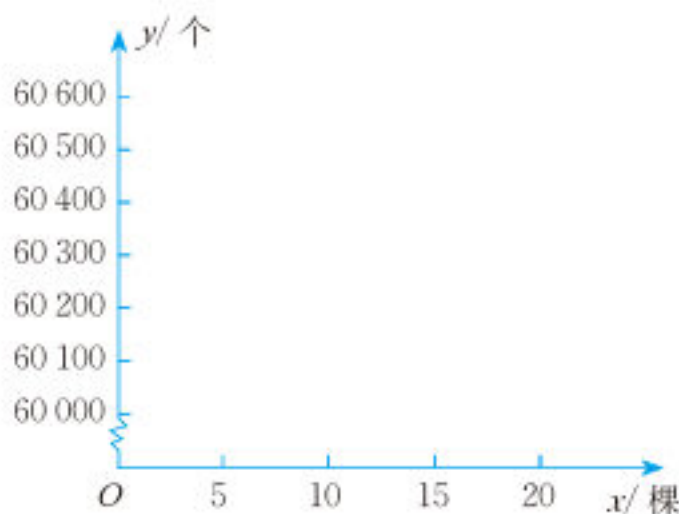


图 5-10

随堂练习

1. 某商店购进一批单价为 20 元的日用商品, 如果以单价 30 元销售, 那么半个月内可售出 400 件。根据销售经验, 销售单价每提高 1 元, 销售量相应减少 20 件。该商店将这种日用商品的销售单价定为多少元时, 半个月内获得的利润最大? 最大利润是多少?

阅读·欣赏

二次函数的广泛应用

二次函数是刻画客观世界许多现象的一种重要模型。请看下面的一些例子。

1. 某一物体的质量为 m , 它的动能 E 与它的运动速度 v 之间的关系是

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (m \text{ 为定值}).$$

2. 导线的电阻为 R , 当导线中有电流通过时, 单位时间所产生的热量 Q 与电流 I 之间的关系是

$$Q = RI^2 \quad (R \text{ 为定值}).$$

3. g 表示重力加速度, 当物体由静止开始自由下落时, 下落的距离 h 与下落时间 t 之间的关系是

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g \text{ 为定值}).$$

此外，二次函数在建筑学上也有重要应用，生活中不少建筑都设计成抛物线形状，如抛物线形桥梁、隧道等。我们常见的喷泉、抛球、流星雨，甚至是人的眉毛和微笑的嘴唇，无不蕴藏着抛物线的影子。



习题5.3

> 知识技能

1. 已知二次函数图象的顶点坐标是 $(2, 3)$ ，且经过点 $(-1, 0)$ ，求这个二次函数的表达式。
2. 已知二次函数图象与 x 轴交点的横坐标是 -2 和 1 ，且经过点 $(0, 3)$ ，求这个二次函数的表达式。

> 问题解决

- ※3. 某高尔夫球手击出的高尔夫球的运动路线是一条抛物线，当球向前运动的水平距离为 24 m 时，它运动的高度达到最大；落球点比击球点低 1 m ，它们的水平距离为 50 m 。

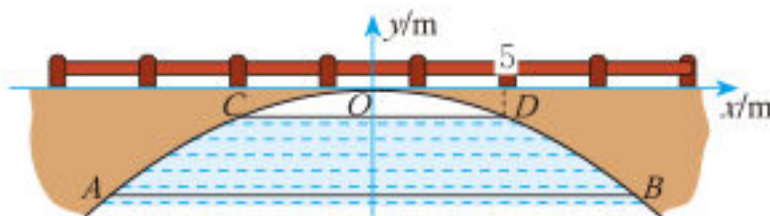
- (1) 建立适当的平面直角坐标系，求该球运动的高度 h (单位： m) 与它向前运动的水平距离 x (单位： m) 之间的关系式；
- (2) 该球运动的最高点比击球点高多少米？



(第4题)

4. 如图，用一根金属型材制作一个“日”字形窗户的框架 $ABCD$ ，这根金属型材总长为 6 m ，不考虑金属型材的宽度及制造中的接口损耗，当 AB ， AD 分别为多少米时，窗户的面积最大？最大面积是多少？

- ※5. 如图，有一座抛物线形拱桥，在正常水位时水面宽 $AB = 20\text{ m}$ ，当水位上升 3 m 时，水面宽 $CD = 10\text{ m}$ 。



(第5题)

- (1) 按如图所示的平面直角坐标系, 求此抛物线的表达式。
- (2) 有一条船以 5 km/h 的速度向此桥径直驶来, 当船距离此桥 35 km 时, 桥下水位正好在 AB 处, 之后水位每小时上涨 0.25 m , 当水位达到 CD 处时, 将禁止船只通行。如果该船的速度不变, 那么它能否安全通过此桥?
6. 某旅行社组团去某地旅游, 30 人起组团, 报价为 800 元/人 。旅行社对超过 30 人的团给予优惠: 旅游团每增加 1 人, 报价就降低 10 元/人 。请你帮忙算一下, 当一个旅游团的人数是多少时, 该旅行社可以获得最大营业额? 最大营业额是多少?
7. 某商店购进一批单价为 8 元 的商品, 如果以单价 10 元 出售, 那么每天可销售 100 件 。经调查发现, 这种商品的销售单价每提高 1 元 , 销售量就减少 10 件 。该商店将这种商品的销售单价定为多少时, 每天所获销售利润最大? 最大利润是多少?
8. 在测量时, 为了确定被测对象的最佳值, 经常要对同一对象测量若干次, 然后选取与各测量数据的差的平方和为最小的数作为最佳近似值。例如, 为了确定某种大麦穗长度的最佳值, 测量了 5 个大麦穗的长度, 得到的数据 (单位: cm) 如下:

$6.5, 5.9, 6.0, 6.7, 4.5$ 。

那么这种大麦穗长度的最佳近似值可以取使函数

$$y = (x - 6.5)^2 + (x - 5.9)^2 + (x - 6.0)^2 + (x - 6.7)^2 + (x - 4.5)^2$$

为最小值的 x 值。整理上式, 并求出这种大麦穗长度的最佳近似值。

4

二次函数与一元二次方程

我们已经知道，竖直上抛物体运动的高度 h （单位：m）与运动的时间 t （单位：s）之间的关系可以近似地用公式 $h = -5t^2 + v_0t + h_0$ 表示，其中 h_0 （单位：m）是物体被抛出时的高度， v_0 （单位：m/s）是物体被抛出时的速度。一个小球从地面被以 40 m/s 的速度竖直向上抛出，小球运动的高度 h 与运动的时间 t 之间的关系如图 5-11 所示。

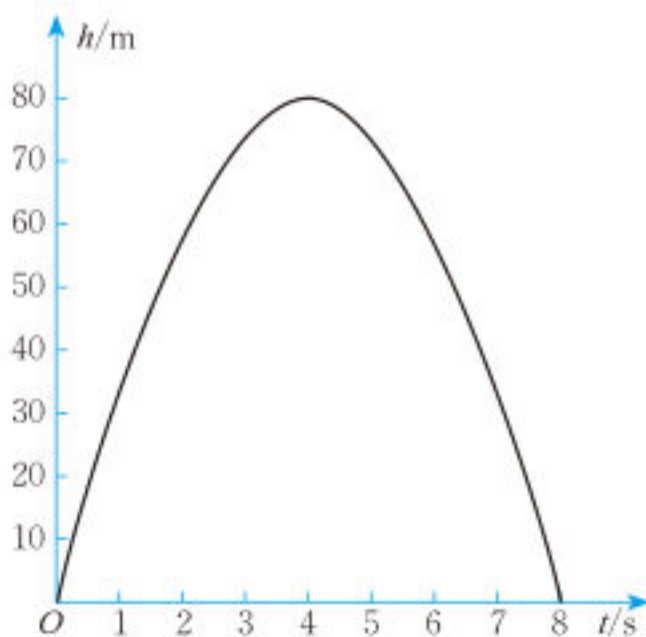


图 5-11

- (1) 写出 h 与 t 之间的关系式。
- (2) 小球经过多少秒落地？你有几种求解方法？与同伴进行交流。

观察·思考

二次函数 $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 - 2x + 1$, $y = x^2 - 2x + 2$ 的图象如图 5-12 所示。

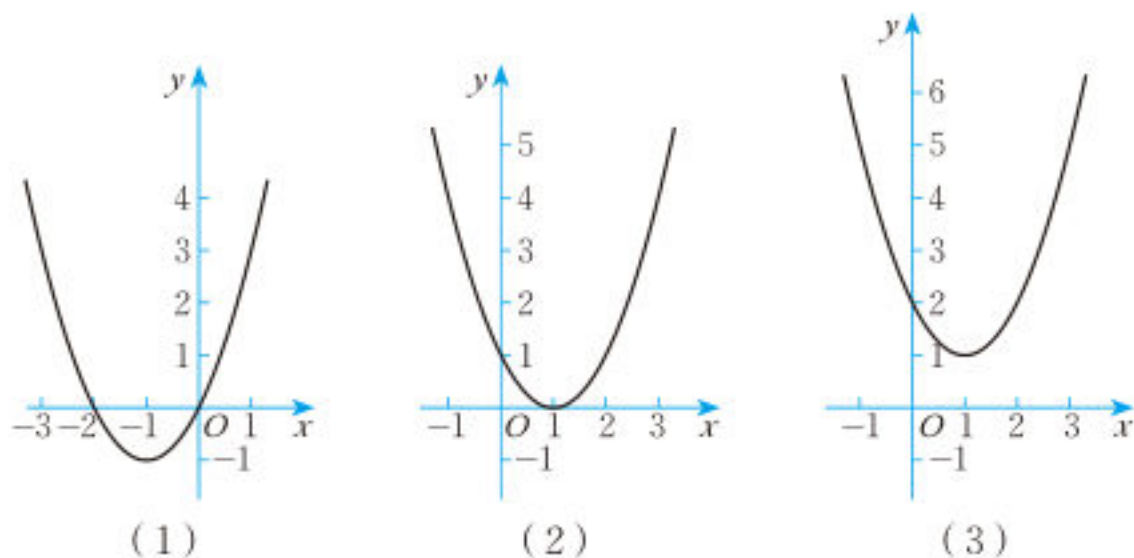


图 5-12

(1) 每个图象与 x 轴有几个交点？

(2) 一元二次方程 $x^2 + 2x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x^2 - 2x + 2 = 0$ 分别有几个实数根？用根的判别式验证一下。

(3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的坐标和一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根有什么关系？

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的交点有三种情况：有两个交点、有一个交点、没有交点。

与此相对应，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根也有三种情况：有两个不相等的实数根、有两个相等的实数根、没有实数根。

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根。

思考·交流

在本节一开始的上抛小球问题中，何时小球的高度是 60 m？你是如何知道的？与同伴进行交流。

随堂练习

1. 一个小球被从地面向上弹出，它的高度 h (单位：m) 可以用公式 $h = -4.9t^2 + 19.6t$ 来表示，其中 t (单位：s) 表示小球被弹出后经过的时间。
 - (1) 画出函数 $h = -4.9t^2 + 19.6t$ 的图象。
 - (2) 小球被弹出后 1 s 时的高度是多少？2 s 时呢？
 - (3) 方程 $-4.9t^2 + 19.6t = 0$ 和方程 $-4.9t^2 + 19.6t = 14.7$ 的根的实际意义分别是什么？请结合图象说明。

你能利用二次函数的图象估计一元二次方程 $x^2 + 2x - 10 = 0$ 的根吗？

图 5-13 是函数 $y = x^2 + 2x - 10$ 的图象。

由图象可知方程有两个根，一个在 -5 和 -4 之间，另一个在 2 和 3 之间。

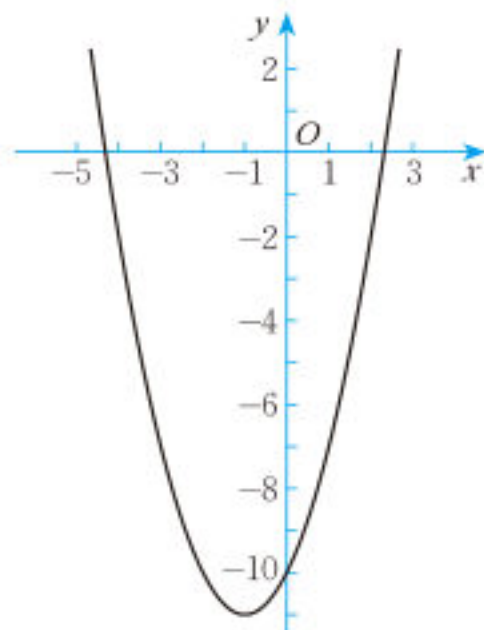


图 5-13

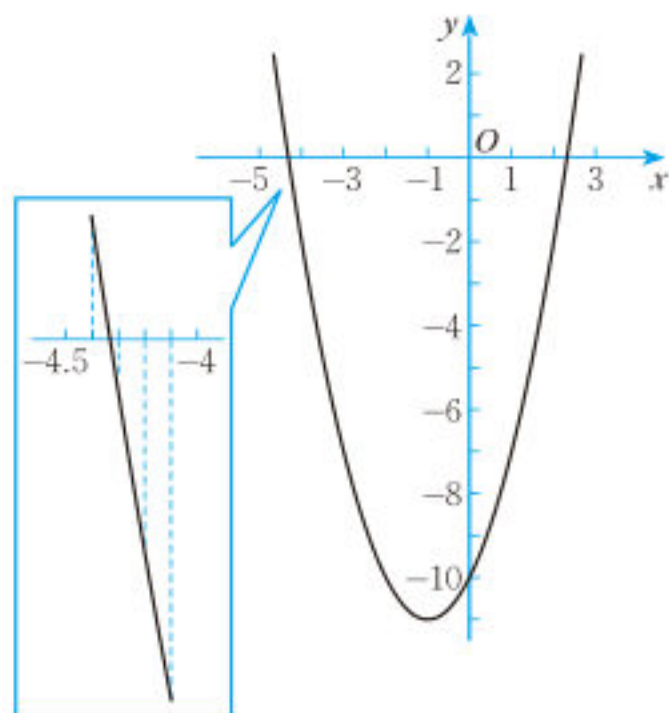


图 5-14

(1) 先求 -5 和 -4 之间的根。如图 5-14，利用计算器进行探索：

x	-4.1	-4.2	-4.3	-4.4
y	-1.39	-0.76	-0.11	0.56

因此， $x = -4.3$ 是方程的一个近似根^❶。

(2) 另一个根可以类似地求出：

x	2.1	2.2	2.3	2.4
y	-1.39	-0.76	-0.11	0.56

因此， $x = 2.3$ 是方程的另一个近似根。

用一元二次方程的求根公式验证一下，看是否有相同的结果。

❶ 本书规定：用图象法求一元二次方程的近似根时，结果只取到十分位。

操作·思考

如何利用如图 5-15 所示的二次函数图象求一元二次方程 $x^2 + 2x - 10 = 3$ 的近似根？你是怎么做的？

思考·交流

一次函数与二元一次方程的关系、二次函数与一元二次方程的关系，这两者在研究内容和研究方法方面有什么异同？与同伴进行交流。

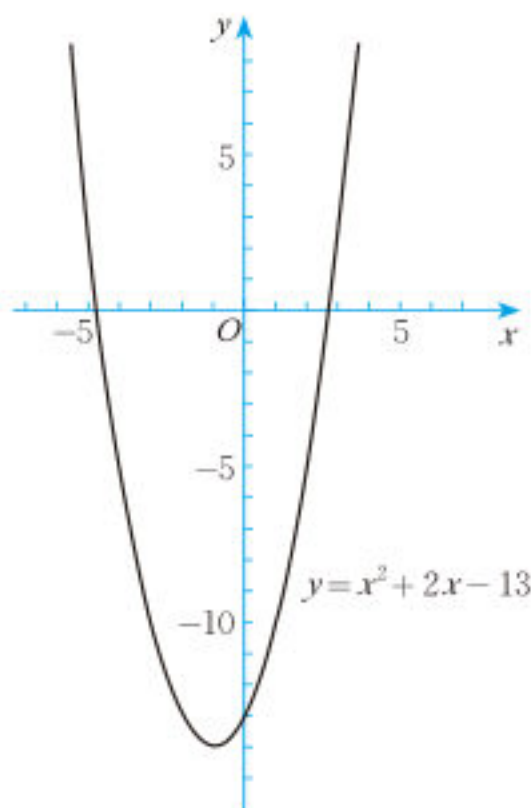
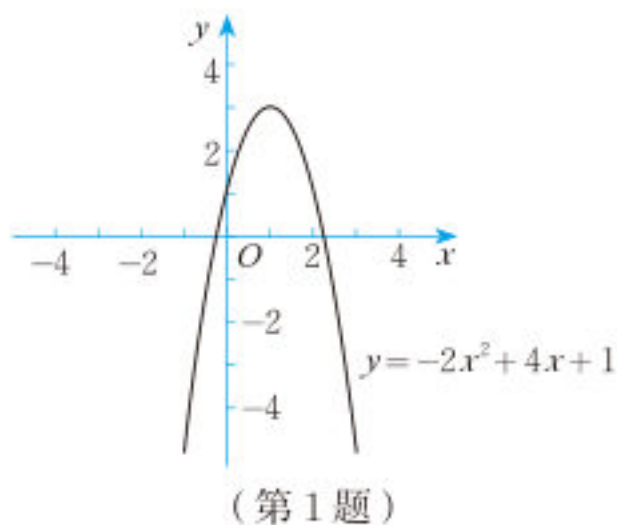


图 5-15

随堂练习

1. 利用如图所示的二次函数图象求一元二次方程 $-2x^2 + 4x + 1 = 0$ 的近似根。



阅读·思考

利用二次函数图象求解不等式

本节我们学习了利用二次函数图象求解一元二次方程的方法。例如，由图 5-12 (1) 可以发现，二次函数 $y = x^2 + 2x$ 的图象与 x 轴的交点为 $(-2, 0)$ ， $(0, 0)$ ，因此一元二次方程 $x^2 + 2x = 0$ 的根为 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 0$ 。

观察图 5-12 (1), 思考下列问题:

(1) 当 x 取什么值时, $x^2 + 2x > 0$? (2) 当 x 取什么值时, $x^2 + 2x < 0$?

实际上, 利用二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象, 我们不仅可以求解一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 还可以求解不等式

$$ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0.$$

以二次函数 $y = x^2 - 5x + 4$ 的图象 (如图 5-16) 为例, 图象与 x 轴的交点为 $(1, 0)$, $(4, 0)$ 。当 $x < 1$ 或 $x > 4$ 时, 图象位于 x 轴上方, 此时 $y > 0$, 即 $x^2 - 5x + 4 > 0$; 当 $1 < x < 4$ 时, 图象位于 x 轴下方, 此时 $y < 0$, 即 $x^2 - 5x + 4 < 0$ 。因此, 不等式 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 的解集为 $x < 1$ 或 $x > 4$; 不等式 $x^2 - 5x + 4 < 0$ 的解集为 $1 < x < 4$ 。

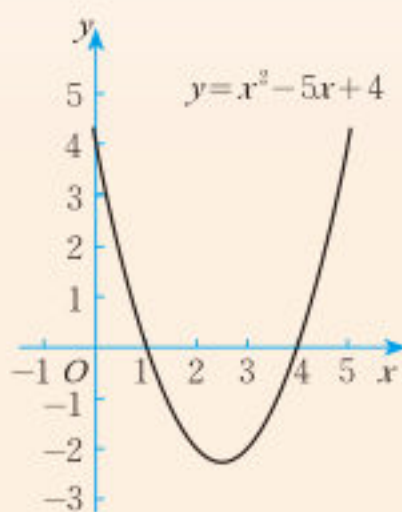


图 5-16

利用图 5-12 (2) (3) 的二次函数图象, 你能求解哪些不等式? 请你想一想、试一试, 并与同伴进行交流。



习题 5.4

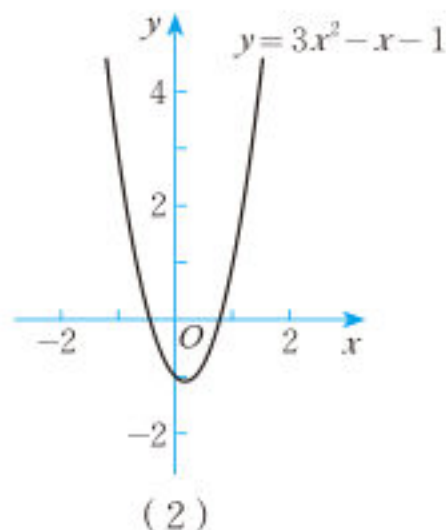
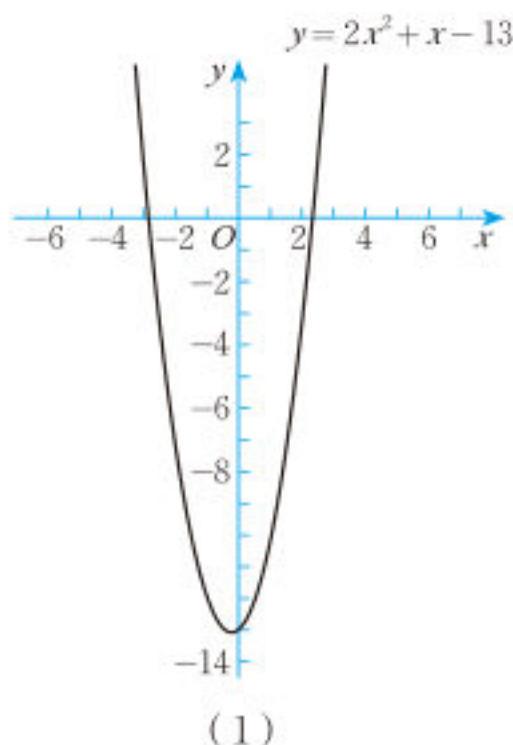
> 知识技能

1. 下列二次函数的图象与 x 轴是否相交? 如果相交, 请求出交点的坐标, 并画草图验证。

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$;

(2) $y = -2x^2 + 20x - 49$ 。

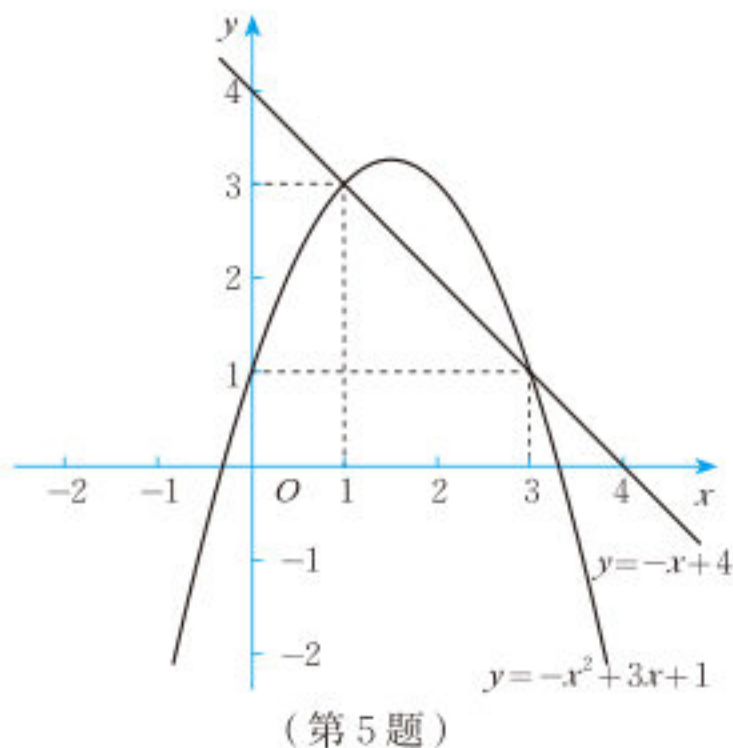
2. 二次函数 $y = x^2 + bx - 1$ 的图象与 x 轴相交吗? 如果相交, 有几个交点?
3. 利用二次函数的图象求下列一元二次方程的近似根:
- (1) $2x^2 + x - 13 = 0$; (2) $3x^2 - x - 1 = 0$ 。



(第3题)

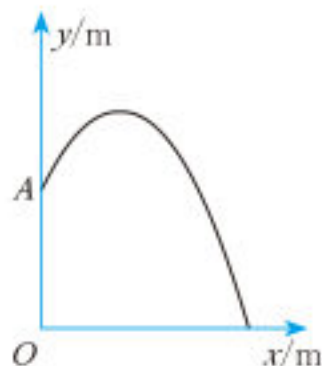
> 数学理解

4. 一元二次方程 $x^2 - 6x + 4 = 1$ 的根与二次函数 $y = x^2 - 6x + 4$ 的图象有什么关系? 试把方程的根在图象上表示出来。
5. 二次函数 $y = -x^2 + 3x + 1$ 的图象与一次函数 $y = -x + 4$ 的图象如图所示, 方程 $-x^2 + 3x + 1 = -x + 4$ 有解吗? 如果有, 请直接写出; 如果没有, 请说明理由。



问题 解决

6. 如图, 一个圆形喷水池的中央竖直安装了一个柱形喷水装置 OA , A 处的喷头向外喷水, 水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下, 按如图所示的平面直角坐标系, 水流运动的高度 y (单位: m) 与它向前运动的水平距离 x (单位: m) 之间的关系式是 $y = -x^2 + 2x + \frac{7}{4}$ ($x > 0$)。



(1) 喷水装置 OA 的高度是多少?

(2) 若不考虑其他因素, 则水池的半径至少为多少, 才能使喷出的水流不至于落在池外? (第6题)

联系 拓广

7. 利用二次函数 $y = 2x^2$ 的图象与一次函数 $y = x + 2$ 的图象, 求一元二次方程 $2x^2 = x + 2$ 的近似根。



问题解决活动：怎样围面积最大

问题 张伯伯想在房屋一侧的空地上，用篱笆和房屋的一面外墙围一个矩形鸭舍，其中篱笆长为 60 m。请你帮助张伯伯设计，使围成的鸭舍面积最大。

理解问题

- (1) 本题的目标是什么？已知条件有哪些，条件足够吗？
- (2) 用篱笆和房屋的一面外墙围矩形鸭舍有哪些可能情况？请画图表示。

拟订计划

- (1) 以前解决过类似的问题吗？关于最大值问题你有哪些经验？
- (2) 假设外墙足够长，怎样围鸭舍面积最大？由此你能得到什么结论？
- (3) 假设外墙很短，怎样围鸭舍面积最大？由此你能得到什么结论？
- (4) 还有什么情况需要研究？与同伴进行交流。

实施计划

根据外墙长度的不同，分别确定矩形鸭舍的围法，并说明道理。

回顾反思

- (1) 在探索这个问题的解决方案和实施方案的过程中，你获得了哪些经验？与同伴进行交流。
- (2) 在这个问题中，鸭舍面积与哪些因素有关？如果改变部分因素，你还能提出哪些新的研究问题？

请你解决下面的问题。

在本节的问题中，如果外墙长为 20 m，且要求用上全部篱笆，那么怎样围能使矩形鸭舍的面积为 $200 \text{ m}^2 \sim 400 \text{ m}^2$ ？请画图说明。



回顾与思考

1. 你在哪些情况下见到过抛物线的“身影”？用语言或图形进行描述。
2. 你能用二次函数的知识解决哪些实际问题？与同伴进行交流。
3. 举例说明画二次函数图象需要注意哪些问题。
4. 二次函数的图象有哪些性质？如何确定它的开口方向、对称轴和顶点坐标？请用具体例子说明。
5. 请用自己的语言描述二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根之间的关系。
6. 梳理本章内容，用适当的方式呈现全章知识结构，并与同伴进行交流。



复习题

> 知识技能

1. 两个数的和为 6，这两个数的积最大可以达到多少？利用图象描述这两个数的积与因数之间的关系。
2. 确定下列二次函数图象的对称轴和顶点坐标：

(1) $y = 2 - 2x^2$;	(2) $y = -3(x - 1)^2 + 5$;
(3) $y = 4(x + 3)^2 - 1$;	(4) $y = x(5 - x)$;
(5) $y = 1 + 2x - x^2$;	(6) $y = 2x^2 - 7x + 12$ 。
3. 确定下列二次函数的图象与 x 轴的交点的坐标，并画草图验证：

(1) $y = x^2 + 6x + 9$;	(2) $y = 9 - 4x^2$;
(3) $y = (x + 1)^2 - 9$ 。	
4. 把一根长为 120 cm 的铁丝分成两段，每一段均折成一个正方形，这两个正方形的面积之和最小是多少？

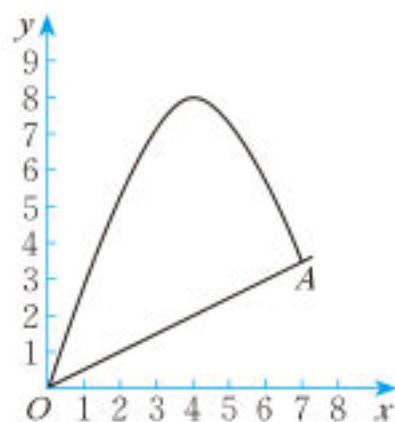
5. 物体的动能 E (单位: J) 与它的质量 m (单位: kg)、运动速度 v (单位: m/s) 之间的关系可以用公式 $E = \frac{1}{2}mv^2$ 表示。一辆小轿车的质量为 1 500 kg, 行驶速度为 10 m/s。设该车行驶速度增加 x m/s 时, 它的动能增加 y J。
- (1) 写出 y 与 x 之间的关系式;
 - (2) 当该车行驶速度分别增加 5 m/s, 10 m/s, 20 m/s 时, 它的动能各增加多少?
6. 自由落体运动是物体只在重力作用下由静止开始下落的运动, 地球上物体自由下落的距离 h (单位: m) 与下落的时间 t (单位: s) 之间的关系是 $h = 4.9t^2$ 。我们知道, 同一物体, 在月球上所受的重力大约是在地球上所受重力的 $\frac{1}{6}$, 因此, 月球上物体自由下落的距离 h (单位: m) 与下落的时间 t (单位: s) 之间的关系大约是 $h = 0.8t^2$ 。
- (1) 在同一平面直角坐标系中画图, 分别表示地球上、月球上 h 与 t 之间的关系;
 - (2) 比较物体下落 4 s 时, 在地球上和月球上分别下落的距离;
 - (3) 比较物体下落 10 m 时, 在地球上和月球上分别所需要的时间 (结果精确到 0.1 s)。
7. 求二次函数 $y = x^2 - x - 5$ 的图象与一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象的交点坐标。请利用函数表达式、表格和图象三种方法求解。
8. 一元二次方程 $-x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$ 的根与二次函数 $y = -x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ 的图象之间有什么关系?
9. 利用二次函数的图象求下列一元二次方程的近似根:
- (1) $x^2 + 11x = 9$;
 - (2) $x^2 + 3x = 20$;
 - (3) $x^2 + 2x - 9 = 0$;
 - (4) $x^2 + 3 = 3x$ 。

> 数学理解

10. (1) 正方形的边长是 x , 面积是 A , 周长是 l , 分别写出 A , l 与 x 之间的关系式;
- (2) 在同一平面直角坐标系中画出上述关系式在 $x \geq 0$ 范围内的图象, 并比较它们的变化趋势。

11. 已知一个平行四边形的高与底边的比是 $h:a=2:5$, 写出这个平行四边形的面积 S 与它的底边 a 之间的关系式, 并从图象观察这个平行四边形的面积随着其底边的变化而变化的情况。

12. 如图, 从斜坡 O 点处抛出一个球, 球的运动路线可以用二次函数 $y=4x-\frac{1}{2}x^2$ 刻画, 斜坡可以用一次函数 $y=\frac{1}{2}x$ 刻画。

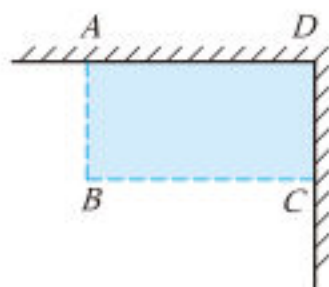


- (1) 求小球到达的最高点的坐标;
(2) 小球的落点是 A , 求点 A 的坐标。

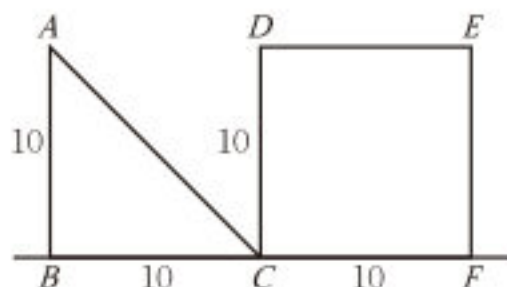
(第12题)

问题解决

13. 如图, 用篱笆(虚线部分)在墙角围一个矩形, 已知篱笆的长度是 15 m , 如何围篱笆才能使其所围矩形 $ABCD$ 的面积最大? 最大面积是多少?



(第13题)

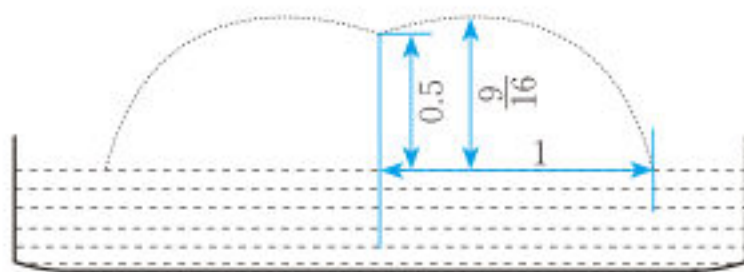


(第14题)

14. 如图(单位: m), 等腰直角三角形 ABC 在正方形 $CDEF$ 的左侧, 点 B, C, F 在一条直线上。现 $\triangle ABC$ 由如图所示的位置开始, 以 2 m/s 的速度沿直线 BF 从左向右运动(正方形 $CDEF$ 保持不动), 直到边 AB 与边 CD 重合。设运动 $x\text{ s}$ 时, $\triangle ABC$ 与正方形 $CDEF$ 重叠部分的面积为 $y\text{ m}^2$ 。
- (1) 写出 y 与 x 之间的关系式。
(2) 当 $x=2, 3.5$ 时, y 分别是多少?
(3) 当重叠部分的面积是正方形 $CDEF$ 面积的一半时, $\triangle ABC$ 运动了多长时间?
15. 下表呈现了某竖直上抛物体运动的高度 h (单位: m) 与运动的时间 t (单位: s) 之间关系的部分数据:

t/s	1	5	10	15	20	25
h/m	155	635	1 010	1 135	1 010	635

- (1) 根据上表, 以时间 t 为横轴、高度 h 为纵轴建立平面直角坐标系, 并描出上述各点。
- (2) 根据第 (1) 题平面直角坐标系中各点的变化趋势, 试确定 h 关于 t 的函数类型, 并求这一函数的表达式。
- (3) 该物体运动的最大高度是多少? 你是根据哪种表示方式求解的?
- *16.** 如图, 喷水池的喷水口位于水池中心, 到水面的距离为 0.5 m , 喷出的水流呈抛物线形状, 最高点离水面 $\frac{9}{16}\text{ m}$, 落水点离池中心 1 m 。

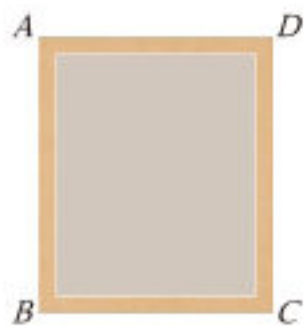


(第16题)

请建立适当的平面直角坐标系, 用函数表达式描述左、右两边两条水流的形状, 并说明自变量的取值范围。

17. 把一个数 a 写成两数之和, 何时这两个加数的乘积最大? 请说明理由。

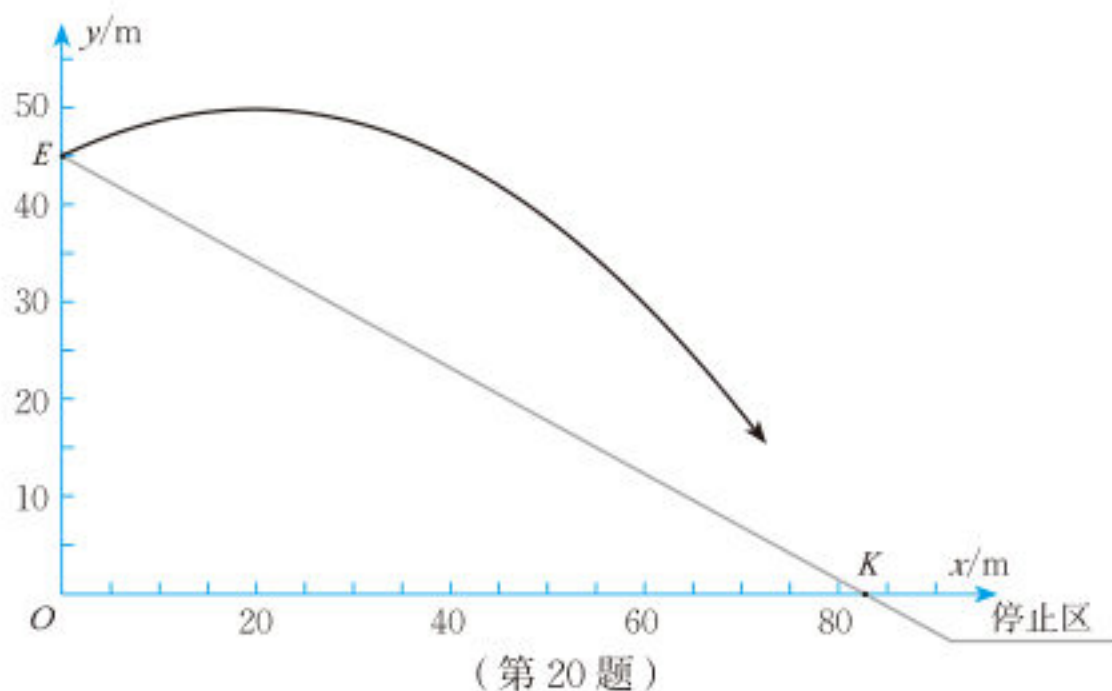
18. 相框边的宽窄影响可放入相片的大小。如图, 相框的长为 26 cm , 宽为 22 cm , 相框边的宽度为 $x\text{ cm}$, 相框内的面积为 $y\text{ cm}^2$ 。



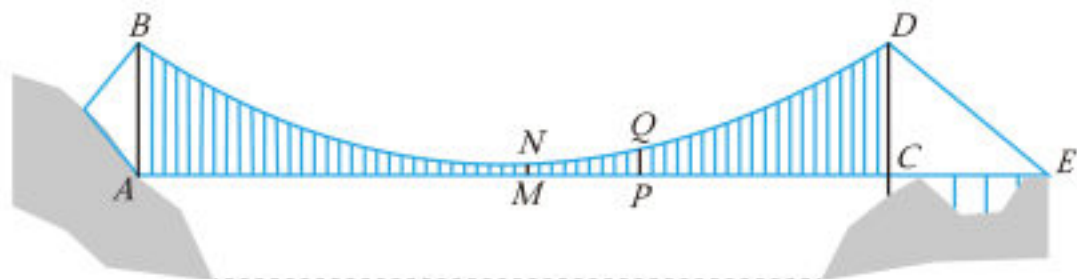
(第18题)

- (1) 写出 y 与 x 之间的关系式;
- (2) 用图象表示 y 与 x 之间的关系;
- (3) 当 $x=1, 1.5, 2$ 时, 分别可以放入多大的相片?
19. 竖直向上发射的物体运动的高度 h (单位: m) 满足关系式 $h=-5t^2+v_0t$, 其中 t (单位: s) 是物体运动的时间, v_0 (单位: m/s) 是物体被发射时的速度。某公园计划设计园内喷泉, 喷水的最大高度要求达到 15 m , 那么喷水的速度应该达到多少 (结果精确到 0.01 m/s)?

20. 如图,一位跳台滑雪运动员在一次训练中从起跳点起跳飞出,在着陆坡着陆。已知起跳点 E 与着陆坡上的计分参照点 K 的垂直距离为 45 m,水平距离为 83 m。按如图所示的平面直角坐标系,这位运动员这次起跳后在空中的运动轨迹近似满足抛物线 $y = -\frac{1}{80}x^2 + \frac{1}{2}x + 45$ 。该运动员这次起跳后在空中飞行的最大高度是多少? 着陆时他能越过 K 点吗?



- ※ 21. 如图,大桥的缆索具有抛物线形状,两端的索塔均与桥面垂直,且在桥面以上部分高度相同,即 $AB = CD$ 。主桥 AC 长为 600 m,缆索最低处的吊杆 MN 长为 3 m,桥面上与点 M 相距 100 m 处的吊杆 PQ 长为 13 m。请建立适当的平面直角坐标系,求索塔在桥面以上部分的高度。

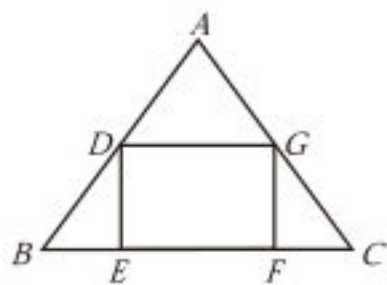


(第 21 题)

联系拓广

22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $BC = 12$ 。

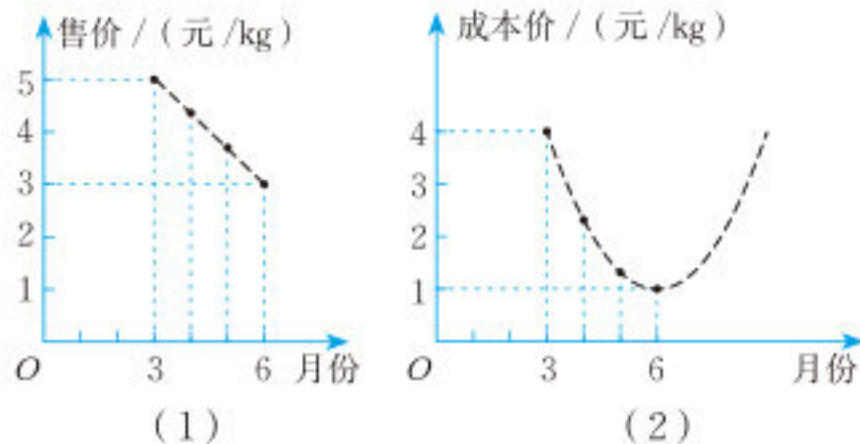
在 $\triangle ABC$ 的内部作一个矩形 $DEFG$, 其中点 D , G 分别在边 AB 和 AC 上, EF 在边 BC 上。设 $EF = x$, 矩形 $DEFG$ 的面积为 y , 写出 y 与 x 之间的关系式, 列出表格, 并画出相应的图象。根据三种表示方法回答下列问题:



(第22题)

- (1) 自变量 x 的取值范围是什么?
- (2) 图象的对称轴和顶点坐标分别是什么?
- (3) 试描述 y 随着 x 的变化而变化的情况。

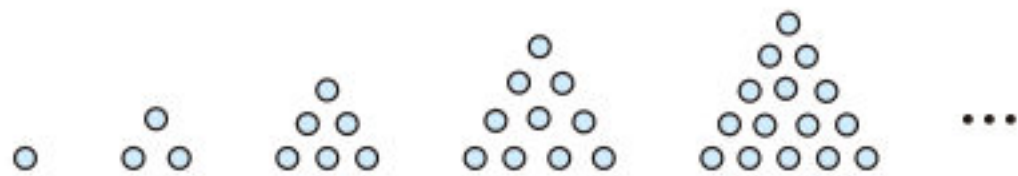
23. 某种蔬菜的售价与销售月份之间的关系如图(1)所示, 成本价与销售月份之间的关系如图(2)所示[图(1)中的图象是线段, 图(2)中的图象是抛物线]。哪个月出售这种蔬菜, 每千克的收益(即售价-成本价)最大?



(第23题)

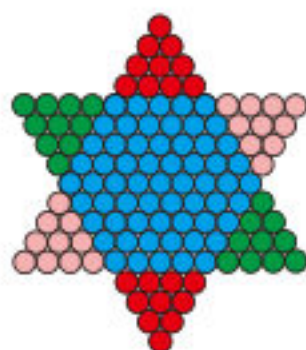
※24. (1) 下面每一个图形中各有多少个小圆圈?

(2) 如果用 n 表示等边三角形边上的小圆圈数, 用 m 表示这个三角形中小圆圈的总数, 那么 m 和 n 之间的关系是什么?



(第24题)

※25. 求如图所示的图形中小圆圈的总数。



(第25题)

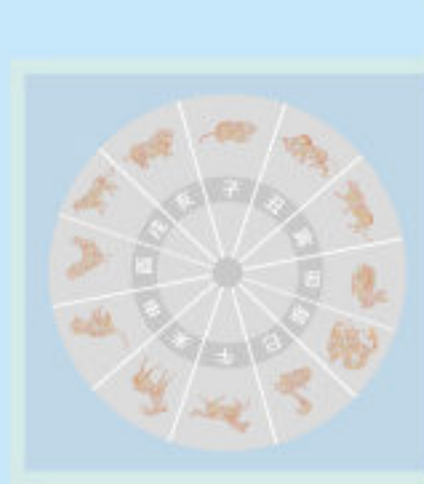
26. 结合函数的学习经验，撰写一篇小短文，谈谈你对函数研究方法的感悟。

第六章

概率的进一步认识

豌豆豆荚的性状（饱满或皱褶）是由一对等位基因决定的，已知豌豆父本与母本的基因组成，你能求子代豆荚饱满的概率吗？有人说，50 个人中很可能有 2 个人的生日相同，你同意这种说法吗？

本章将进一步研究随机事件发生的概率，探索用列表、画树状图的方法计算一些较复杂的等可能事件发生的概率，用试验的方法估计一些随机事件发生的概率。在这一过程中，你将深化对概率的认识，学会从统计与概率的角度认识、理解和表达现实世界中大量存在的随机现象，并综合运用统计与概率的思维方法解决一些简单的实际问题，发展数据观念、应用意识、模型观念等。



在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：



💡 为什么可以用随机事件发生的频率估计它发生的概率？

💡 研究随机事件发生的概率，对于我们认识世界有什么帮助？

1

用树状图或表格求概率

小明、小刚、小凡一起参加课外体育活动，小明想打篮球，小刚想踢足球，小凡想打乒乓球，谁也说服不了谁，最后三人决定一起做游戏，谁获胜就听谁的。游戏规则如下：

连续掷两枚质地均匀的硬币，若两枚正面朝上，则小明获胜；若两枚反面朝上，则小刚获胜；若一枚正面朝上、一枚反面朝上，则小凡获胜。

你认为这个游戏公平吗？

操作·思考

连续掷两枚质地均匀的硬币，估计“两枚正面朝上”“两枚反面朝上”“一枚正面朝上、一枚反面朝上”这三个随机事件发生的概率。

(1) 两人一组，一人掷硬币，一人记录试验结果。每组做 20 次试验，根据试验结果填写下面的表格。

试验	第 1 次	第 2 次	第 3 次	...	第 20 次
试验结果					

(2) 请你设计一个统计表，汇总全班同学的试验数据，并统计当试验次数为 20 次、40 次、60 次、80 次、100 次……时上述三个事件发生的频率，然后绘制相应的折线统计图。

(3) 你能分别估计上述三个事件发生的概率吗？根据估计结果，你认为这个游戏公平吗？

通过大量的重复试验我们发现，在一般情况下，“一枚正面朝上、一枚反面朝上”发生的概率大于其他两个事件发生的概率。所以，这个游戏是不公平的，它对小凡比较有利。

思考·交流

在上面掷硬币的试验中，

- (1) 掷第一枚硬币，可能出现哪些结果，它们发生的可能性是否相同？
- (2) 在第一枚硬币为正面朝上的情况下，掷第二枚硬币可能出现哪些结果，它们发生的可能性是否相同？如果第一枚硬币为反面朝上，情况又是怎样的呢？与同伴进行交流。

硬币质地均匀，因此掷第一枚硬币时，出现“正面朝上”和“反面朝上”的概率相等。而无论掷第一枚硬币的结果如何，掷第二枚硬币时出现“正面朝上”和“反面朝上”的概率仍相等。为了方便和直观，我们常常用树状图或者表格列出所有可能出现的结果：



第一枚硬币	第二枚硬币	
	正	反
正	(正, 正)	(正, 反)
反	(反, 正)	(反, 反)

总共有 4 种结果，每种结果出现的可能性相同。

小明获胜的结果有 (正, 正) 1 种，所以小明获胜的概率是 $\frac{1}{4}$ ；

小刚获胜的结果有 (反, 反) 1 种，所以小刚获胜的概率是 $\frac{1}{4}$ ；

小凡获胜的结果有 (正, 反) (反, 正) 2 种，所以小凡获胜的概率是 $\frac{2}{4}$ 。

因此，这个游戏是不公平的，它对小凡比较有利。

利用树状图或表格，我们可以不重复、不遗漏地列出所有可能的结果，从而比较方便地求出某些随机事件发生的概率。

随堂练习

1. 小颖有两件上衣，分别为红色和白色，有两条裤子，分别为黑色和白色。她随机拿出一件上衣和一条裤子穿上，恰好是白色上衣和白色裤子的概率是多少？

通过试验估计和理论计算，小明、小刚和小凡发现前面的游戏并不公平，所以他们决定改做“石头、剪刀、布”的游戏（如图 6-1）。游戏规则如下：

由小明和小凡玩“石头、剪刀、布”游戏，如果两人的手势相同，那么小刚为游戏的获胜者；如果两人手势不同，那么按照“石头胜剪刀，剪刀胜布，布胜石头”的规则，小明和小凡中的获胜者为游戏的获胜者。



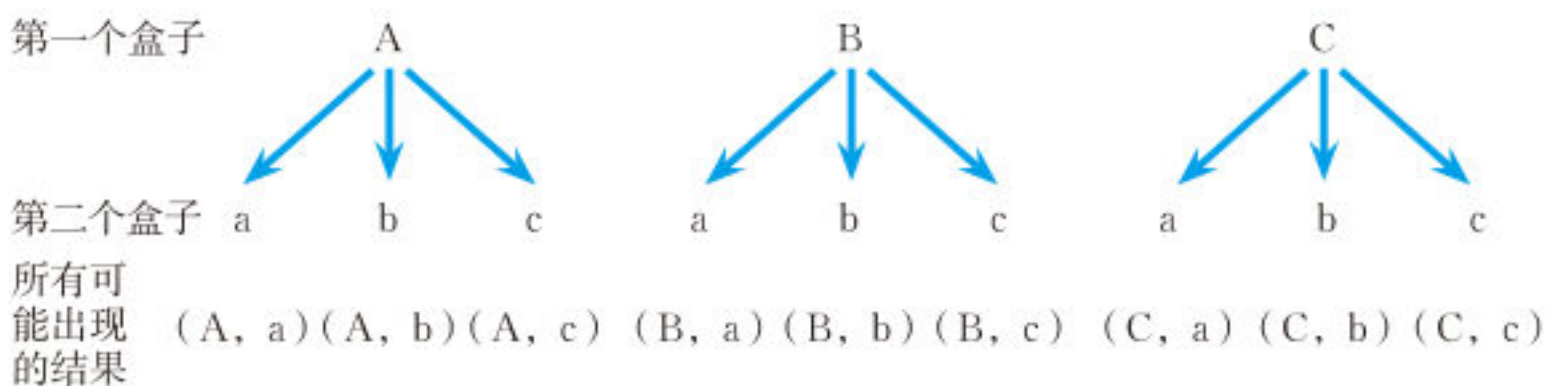
图 6-1

假设小明和小凡每次出这三种手势的可能性相同，那么你认为这个游戏公平吗？你是怎么做的？与同伴进行交流。

例1 小凡利用三张卡片设计了一个抽奖游戏：三张卡片形状和大小相同，上面分别画有图书、文具和球拍的图案。将每张卡片从中间剪开成形状、大小相同的上下两部分，把三张卡片的上半部分都放在第一个盒子中，下半部分都放在第二个盒子中，并分别混合均匀。抽奖者从每个盒子中各随机地抽出一片，如果抽出的两片恰好能拼成原来的图案，那么就得到对应图案的奖品。小明参加了这个游戏，求：

- (1) 小明得到图书的概率；
 (2) 小明得到奖品的概率。

解：为了方便，我们将图案为图书、文具和球拍的三张卡片的上半部分依次记为 A, B, C，下半部分依次记为 a, b, c。可以用树状图列出所有可能的结果：



总共有 9 种可能的结果。由于每片均为随机抽取，所以每种结果出现的可能性相同。

(1) 抽出的两片恰好能拼成图书图案的结果只有 (A, a) 1 种，所以小明得到图书的概率是 $\frac{1}{9}$ ；

(2) 抽出的两片恰好能拼成原来图案的结果有 (A, a) (B, b) (C, c) 3 种，所以小明得到奖品的概率是 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 。

随堂练习

- 孟德尔 (Gregor Johann Mendel, 1822—1884) 是奥地利遗传学家，遗传学的奠基人。他在研究中发现，生物的性状是由遗传因子决定的 (后来的科学家将“遗传因子”命名为“基因”)。例如，豌豆豆荚的性状 (饱满或皱褶) 是由一对等位基因 S 和 s 决定的，这对基因一个来自父本，一个来自母本。当这对基因由两个 S 组成 (记为 SS)，或者由一个 S 和一个 s 组成 (记为 Ss) 时，豌豆豆荚的性状表现为“饱满”；当这对基因由两个 s 组成 (记为 ss) 时，豌豆豆荚的性状表现为“皱褶”。假设父本与母本的这对等位基因都是由一个 S 和一个 s 组成的，且两个基因 S 和 s 会等可能地遗传给其子代，求子代的豆荚性状是饱满的概率。

小颖为学校联欢会设计了一个“配紫色”游戏：图 6-2 所示的是两个可以自由转动的转盘，每个转盘分别被分成面积相等的几个扇形。游戏者同时转动两个转盘，如果转盘 A 转出了红色，转盘 B 转出了蓝色，那么他就赢了，因为红色和蓝色在一起配成了紫色。



图 6-2

- (1) 利用画树状图或列表的方法表示游戏所有可能出现的结果。
- (2) 游戏者获胜的概率是多少？

尝试 · 思考

用图 6-3 所示的转盘进行“配紫色”游戏。

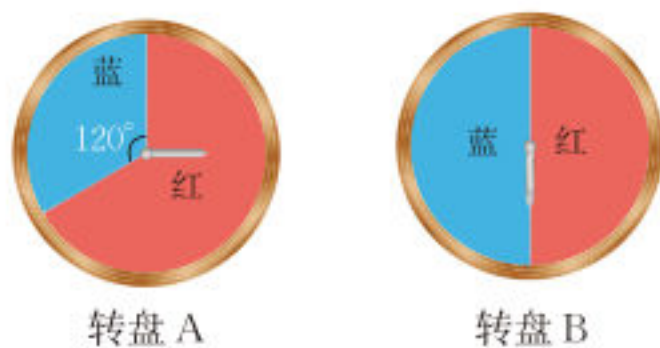
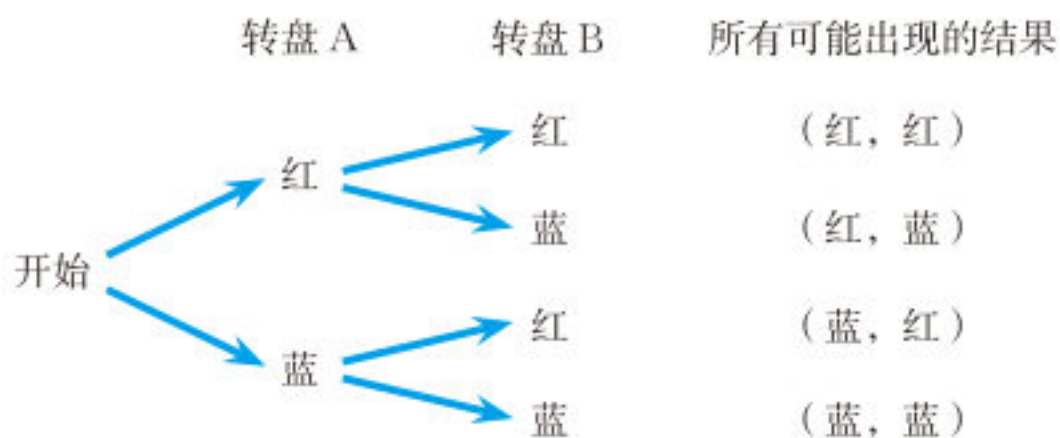


图 6-3

小颖画出了下面的树状图，并据此求出游戏者获胜的概率是 $\frac{1}{2}$ 。



小明则先把转盘 A 的红色区域等分成 2 份，分别记作“红 1”“红 2”，然后列出了下表，据此求出游戏者获胜的概率也是 $\frac{1}{2}$ 。

转盘 A	转盘 B	
	红	蓝
红 1	(红 1, 红)	(红 1, 蓝)
红 2	(红 2, 红)	(红 2, 蓝)
蓝	(蓝, 红)	(蓝, 蓝)



你认为谁做的对？

思考·交流

利用画树状图和列表的方法求概率时应注意些什么？与同伴进行交流。

例2 一个盒子中装有 2 个红球、2 个白球和 1 个蓝球，这些球除颜色外都相同。从中随机摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机摸出一个球，求两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率。

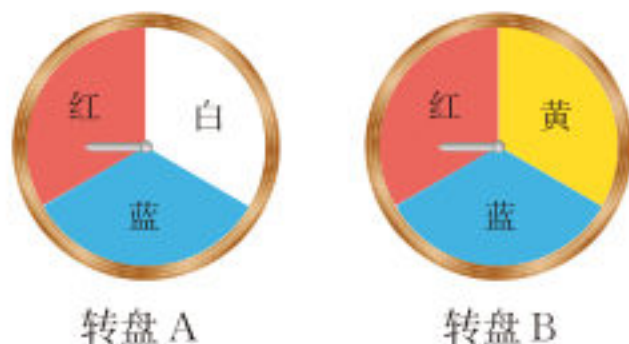
解：先将两个红球分别记作“红 1”“红 2”，两个白球分别记作“白 1”“白 2”，然后列表如下：

第一次	第二次				
	红 1	红 2	白 1	白 2	蓝
红 1	(红 1, 红 1)	(红 1, 红 2)	(红 1, 白 1)	(红 1, 白 2)	(红 1, 蓝)
红 2	(红 2, 红 1)	(红 2, 红 2)	(红 2, 白 1)	(红 2, 白 2)	(红 2, 蓝)
白 1	(白 1, 红 1)	(白 1, 红 2)	(白 1, 白 1)	(白 1, 白 2)	(白 1, 蓝)
白 2	(白 2, 红 1)	(白 2, 红 2)	(白 2, 白 1)	(白 2, 白 2)	(白 2, 蓝)
蓝	(蓝, 红 1)	(蓝, 红 2)	(蓝, 白 1)	(蓝, 白 2)	(蓝, 蓝)

总共有 25 种结果，每种结果出现的可能性相同，而两次摸到的球的颜色能配成紫色的结果有（红 1，蓝）（红 2，蓝）（蓝，红 1）（蓝，红 2）4 种，所以 $P(\text{能配成紫色}) = \frac{4}{25}$ 。

随堂练习

1. 用如图所示的两个转盘进行“配紫色”游戏，每个转盘都被分成面积相等的 3 个扇形，配得紫色的概率是多少？



（第 1 题）

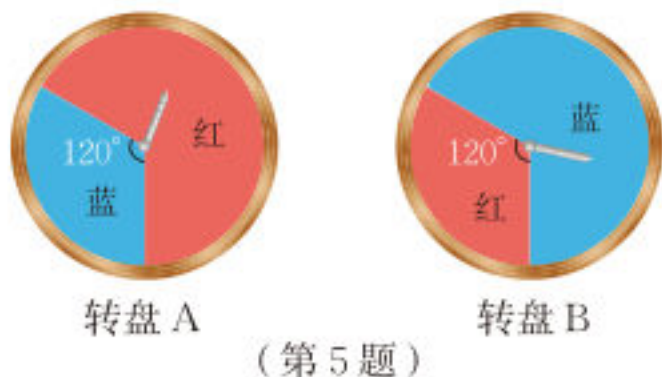


习题 6.1

> 知识技能

- 一个盒子中装有 1 个红球、1 个白球，它们除颜色外都相同。从中随机摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机摸出一个球。求：
 - 两次都摸到红球的概率；
 - 两次摸到不同颜色的球的概率。
- 准备两组相同的牌，每组三张且大小一样，三张牌的牌面数字分别是 1, 2, 3。从每组牌中各随机摸出一张牌。
 - 两张牌的牌面数字和等于 1 的概率是多少？
 - 两张牌的牌面数字和等于 2 的概率是多少？
 - 两张牌的牌面数字和为几的概率最大？
 - 两张牌的牌面数字和大于 3 的概率是多少？

3. 经过某十字路口的行人，可能直行，也可能左转或右转，假设这三种可能性相同。现有两人经过该路口，求下列事件发生的概率：
- (1) 两人都左转； (2) 恰好有一人直行，另一人左转；
(3) 至少有一人直行。
4. 掷两枚质地均匀的骰子，求下列事件发生的概率：
- (1) 至少有一枚骰子的点数为 1； (2) 两枚骰子的点数和为奇数；
(3) 两枚骰子的点数和大于 9； (4) 两枚骰子点数的积是奇数。
5. 用如图所示的两个转盘进行“配紫色”游戏，配得紫色的概率是多少？



6. 一个盒子中装有 3 个红球和 2 个白球，这些球除颜色外都相同。从中随机摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机摸出一个球，求两次摸到相同颜色的球的概率。
7. 有两组卡片，第一组卡片有 3 张，分别写有 A, B, B；第二组卡片有 5 张，分别写有 A, B, B, C, C。从每组卡片中各随机抽出一张卡片，求两张卡片都写有 B 的概率（用画树状图和列表两种方法求解）。

> 数学理解

8. 小明从一定高度随机掷一枚质地均匀的硬币，他已经掷了两次硬币，结果都是“正面朝上”。那么，你认为小明第三次掷硬币时，“正面朝上”与“反面朝上”的可能性相同吗？如果不同，哪种可能性大？说说你的理由。
9. 设计两个转盘进行“配紫色”游戏，使配得紫色的概率是 $\frac{1}{3}$ 。

> 问题解决

10. 孩子是双眼皮还是单眼皮是由一对等位基因 A 和 a 决定的，这对基因一个来自父亲，一个来自母亲。当这对基因由两个 A 组成（记为 AA ），或者由一个 A 和一个 a 组成（记为 Aa ）时，孩子是双眼皮；当这对基因由两个 a 组成（记为 aa ）时，孩子是单眼皮。

(1) 如果父母都是单眼皮，那么他们的孩子一定是单眼皮吗？如果父母都是双眼皮呢？

(2) 假设父母的这对等位基因都是由一个 A 和一个 a 组成的，且两个基因 A 和 a 会等可能地遗传给他们的孩子，求他们的孩子也是双眼皮的概率。

※**11.** 你能设计一个由 3 个人参与且对参与者都公平的游戏吗？试一试，并说明理由。

2

用频率估计概率

400 名同学中，一定有 2 名同学的生日相同（可以不同年）吗？300 名同学中呢？

可有人说：“50 名同学中，就很可能有 2 名同学的生日相同。”你同意这种说法吗？请设计一个试验方案验证你的观点，并与同伴进行交流。

操作·思考

(1) 每名同学课外调查 10 个人的生日。

(2) 从全班的调查结果中随机选取 50 个被调查人的生日，记录其中有无 2 个人的生日相同。每选取 50 个被调查人的生日为一次试验，重复尽可能多次试验，并将数据记录在下表中。

试验总次数	50	100	150	200	250	...
“有 2 个人的生日相同”的次数						
“有 2 个人的生日相同”的频率						

(3) 根据上表中的数据，估计“50 个人中有 2 个人的生日相同”的概率。

思考·交流

通过调查，我们能估计出 50 个人中有 2 个人生日相同的概率，要想使这种估计尽可能精确，常常需要做大量的调查试验，但这样做既费时又费力，甚至有时试验还具有一定的难度和破坏性。

除了上面的实际调查方法外，你还能想到其他的替代方案吗？与同伴进行交流。

在估计 50 个人中有 2 个人生日相同的概率时，可以用 365 个编有号码、大小相同的球，分别代表一年的 365 个日期（一年按 365 天计算），这样就可

以通过摸球试验模拟实际调查，从中摸出 50 个球，作为一次试验；还可以利用计算器产生 $1 \sim 365$ 的随机整数，每一个整数代表一个人的生日，每产生 50 个随机整数为一次试验。重复多次这样的试验，就可以估计 50 个人中有 2 个人生日相同的概率。

尝试·交流

(1) 一个袋中装有 3 个红球、7 个白球，这些球除颜色外都相同。从袋中随机摸出一个球，这个球是红球的概率是多少？

(2) 一个袋中装有若干个红球和白球，这些球除颜色外都相同。如果不将球倒出来数，那么你能设计一个试验方案，估计其中红球和白球的比例吗？

(3) 你还能提出并解决哪些与 (2) 类似的问题？与同伴进行交流。

随堂练习

1. 请在你自己使用的计算器上探索产生随机整数的方法，并利用计算器产生随机整数设计一个试验，估计 50 个人中有 2 个人生日相同的概率。

阅读·思考

恼人的三门问题

某电视节目设置了一个抽奖环节，抽奖者会看见三扇关闭的门，其中一扇门后面有一辆汽车，其余两扇门后面各有一只山羊，它们是随机放置的。如果抽奖者选中后面有车的那扇门，可赢得该汽车，否则只能得到一只山羊。当抽奖者选定了一扇门，但还未开启它的时候，知道门后情形的主持人会从剩下的两扇门中打开一扇后面是山羊的门，然后主持人会问抽奖者要不要改换剩余一扇仍然关闭的门，以增加赢得汽车的概率。

这个问题引起了很多人的争论。最典型的观点有两种：第一种观点认为，没有打开的两扇门后面，分别放着汽车和山羊，换与不换，赢得汽车和山羊

是等可能的，概率都是 $\frac{1}{2}$ ，所以无所谓换不换；第二种观点认为，如果不换，赢得汽车的概率是 $\frac{1}{3}$ ，它不会因为主持人有意识地打开一扇后面是山羊的门而改变，但如果换，赢得汽车的概率是 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ，应该换。

你的观点是什么？如果你无法断定谁对谁错，不妨借助模拟试验来判断。

理论计算的结果说明第二种观点是正确的，你可以通过查找资料了解证明的过程。从这个问题的解决过程中，你能得到什么启示？



习题6.2

> 数学理解

1. 小明和几名同学在课堂上进行摸球试验，大家认为，摸球的人每次摸球前应当将盒中的球摇一摇，使得每个球被摸到的可能性相同。但小明有不同想法，他认为，如果连续两次都是自己摸球，那么他只要在第二次摸球时有意识地避开第一次放进去的那个球，而随意地摸取其他球，就可以保证每个球被摸到的可能性相同。你觉得他的想法对吗？为什么？

> 问题解决

2. 你的生肖是什么？请你设计一个试验，估计6个人中有2个人生肖相同的概率。
3. 生活中，我们有时会用抽签的方法来决定某些事情，而抽签顺序有先后，那么，抽签公平吗？或者说先抽签的人与后抽签的人中签的概率相同吗？请你设计试验，验证抽签是否公平，并与同伴进行交流。
- ※4. 某次抽奖活动，中奖率为 $\frac{1}{10}$ ，请你通过试验估计：
 - (1) 抽奖10次，至少有一次中奖的概率；
 - (2) 抽奖10次，才第一次中奖的概率。



回顾与思考

1. 你掌握了哪些求概率的方法？请举例说明。
2. 你怎样理解用频率估计概率？请举例说明。
3. 通过本章的学习，你对概率的意义和实用价值有怎样的认识？
4. 梳理本章内容，用适当的方式呈现全章知识结构，并与同伴进行交流。



复习题

> 知识技能

1. 在一个有 10 万人的小镇，随机调查了 2 000 人，其中 250 人看某电视台的早间新闻。在该镇随便问一个人，他看该电视台早间新闻的概率大约是多少？
2. (1) 连掷两枚质地均匀的骰子，它们的点数相同的概率是多少？
(2) 自由转动如图所示的转盘（转盘被分成面积相等的 6 个扇形）两次，两次所得的颜色相同的概率是多少？



[第 2(2) 题]

- (3) 一个袋中装有编号为 1~6 的 6 个球（除编号外都相同），先从中随机摸出一个球，将它放回袋中，再摸一次，两次摸到的球相同的概率是多少？
- (4) 小明认为，上面几个求概率的问题本质上是相同的。你同意他的观点吗？

3. 一个密码锁的密码由4个数字组成，每个数字都是0~9这十个数字中的一个，只有当4个数字与所设定的密码相同时，才能将锁打开。小明忘了中间的2个数字，他一次就能打开该锁的概率是多少？
4. 两人做游戏：每人都在纸上随机写一个-2到2之间的整数（包括-2和2），将两人所写整数相加，那么和的绝对值是1的概率是多少？
5. (1) 一个盒子中装有1个红球、2个白球和2个蓝球，这些球除颜色外都相同，从中随机摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机摸出一个球，两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率是多少？
(2) 在上面的问题中，如果从中随机摸出一个球，记下颜色后不放入，再从中随机摸出一个球，那么两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率又是多少？

> 数学理解

6. 随机掷一枚质地均匀的硬币5次，其中2次正面朝上，3次反面朝上，现再掷一次。小明认为，因为硬币质地均匀，前面已经是2次正面朝上，3次反面朝上，所以这一次一定是正面朝上，即这一次正面朝上的概率是1；小凡认为，每次硬币正面朝上和反面朝上的可能性是相同的，所以这一次正面朝上的概率仍然是 $\frac{1}{2}$ 。
你同意谁的观点？你是怎么想的？
7. 小明和小亮用如图所示的两个转盘（每个转盘都被分成5个面积相等的扇形）做游戏，自由转动两个转盘各一次。



转盘 A



转盘 B

(第7题)

- (1) 若两次数字之和为6, 7或8, 则小明胜, 否则小亮胜。这个游戏对双方公平吗？说说你的理由。

- (2) 若两次数字之和为奇数, 则小明胜; 若两次数字之和为偶数, 则小亮胜。这个游戏对双方公平吗? 说说你的理由。

> 问题解决

8. 《列子》中有一则寓言故事: 杨子的邻居走失一只羊, 于是他带着亲友, 请了杨子的童仆一起找寻羊。杨子说: “走失一只羊为什么要这么多人去找寻呢?” 邻居说: “有许多岔路口……” 如图, 假设所有的岔路口都有 2 条新的小路, 且走失的羊走每条小路的可能性相同。



(第 8 题)

- (1) 羊最后走到 A 处的概率是多少?
 - (2) 如果邻居独自一人随机地沿着某一条小路去找羊, 能找到的概率是多少?
 - ※(3) 如果邻居和他儿子两人分别沿着不同的岔路随机地去找羊, 能找到的概率是多少?
9. 两人用一枚质地均匀的骰子做游戏, 游戏规则如下: 每人从 1, 2, …, 12 中任意选择一个数, 然后两人各掷一次骰子, 谁事先选择的数等于两人掷得的点数之和谁就获胜; 如果两人选择的数都不等于掷得的点数之和, 就再做一次上述游戏, 直至决出胜负。做若干次游戏, 你有哪些经验?
- ※10. 小明与小颖做游戏, 他们连续掷一枚质地均匀的硬币, 每掷一次硬币, 若正面朝上, 则小明得 1 分, 否则, 小颖得 1 分, 谁先得 3 分谁获胜。进行一段时间后, 小明得了 2 分, 小颖得了 1 分, 这时, 小明有事要离开, 游戏即将中断。如果游戏继续, 你认为小明和小颖获胜的概率分别是多少?
11. 初中阶段有关概率的学习已经全部完成, 请你写一篇小短文, 谈谈你对概率的认识。

> 联系拓广

- ※12. 连续掷三枚质地均匀的硬币。
- (1) 三枚硬币都是正面朝上的概率是多少?
 - (2) 你觉得求解第 (1) 题时, 适合用画树状图还是列表的方法?

综合与实践

猜想、证明与拓广

任意给定一个正方形，是否存在另一个正方形，它的周长和面积分别是已知正方形周长和面积的 2 倍？你是怎样解决这个问题的？

让我们从这个问题出发，研究更一般的情形。

猜想与证明

1. 从上述问题出发，你能提出哪些更一般的问题或猜想？你能解决你的问题或验证你的猜想吗？

2. 任意给定一个矩形，是否存在另一个矩形，它的周长和面积分别是已知矩形周长和面积的 2 倍？

(1) 你想怎样解决这个问题？先独立思考，再与同伴交流这个问题的思路。

(2) 选择一些具体的矩形试一试，你有什么发现和猜想？能证明你的猜想吗？

拓广与证明

1. 你能将上述“猜想与证明”的问题 2 加以拓广，并提出自己的猜想吗？你能验证你的猜想吗？

2. 任意给定一个矩形，是否存在另一个矩形，它的周长和面积分别是已知矩形周长和面积的一半？

(1) 你有怎样的猜想？请选择一些具体的矩形试一试。

(2) 你的猜想需要修正吗？与同伴进行交流。

(3) 如何证明你的猜想？

反思与再拓广

1. 在解决上述问题的过程中，你遇到了什么困难？是如何克服的？积累了哪些解决问题的经验？
2. 你还能提出哪些可以继续研究的问题？与同伴交流你提出的新问题及探索过程。

池塘里有多少条鱼

想知道一个鱼缸里有几条鱼，只要数一数就可以了。想知道一个池塘里有多少条鱼，就不能一条一条地数了，该怎么办呢？

请你与同学组成合作小组，设计估计池塘里有多少条鱼的方案。

设计方案

1. 回顾解决过的类似问题，你们有哪些经验？能将这个现实问题转化成怎样的数学问题？
2. 设计一个试验方案，模拟估计池塘里有多少条鱼。试验的预期是什么？为此需要做哪些准备？应该注意什么？
3. 模拟试验与现实中估计池塘里有多少条鱼的方式有何关系？

实施方案

1. 以小组为单位，按照试验方案进行模拟试验。
2. 通过模拟试验能获得预期的结果吗？怎样验证？
3. 类比模拟试验，小组合作设计估计池塘里有多少条鱼的方案，将试验方案制作成海报，并说明所用到的数学原理。

评估反思

1. 回顾设计试验方案的过程，你们积累了哪些经验？
2. 利用你们设计的方案还可以解决哪些现实的问题？请举例说明。
3. 结合反思完善海报内容。

成果展示

1. 各小组展示制作的海报。
2. 各小组对设计试验方案的过程与经验进行交流和评价，提出可以进一步研究的问题。



学习印记

- 整理本学期学过的知识与方法，用一张图把它们表示出来，并与同伴进行交流。
- 在自己经历过的解决问题活动中，选择一个最有挑战性的问题，写出解决它的过程，包括遇到的困难、克服困难的方法与过程，以及所获得的体会，并解释选择这个问题的原因。
- 通过本学期的数学学习，你有哪些收获？有哪些需要改进的地方？

你的回顾：



后 记

本套教科书依据《义务教育课程方案（2022年版）》和《义务教育数学课程标准（2022年版）》编写，在2012年版教科书（2021年获首届全国教材建设奖全国优秀教材一等奖1项、二等奖2项）基础上继承创新。

本套教科书基于核心素养精选素材，注重思想性、科学性、适宜性与时代性；内容的组织体现“课程内容结构化”，注重内容间的内在联系；学与教的活动设计体现“学生认知过程结构化”，引导学习方式和教学方式的变革。本套教科书充分体现数学课程标准的基本理念，帮助学生获得数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验，提升发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，形成质疑问难、自我反思和勇于探索的科学精神。

本套教科书编写组成员（按姓氏笔画为序排列）：马复、王永会、王建波、刘晓玫、安志军、张惠英、胡赵云、顾继玲、凌晓牧、章飞、章巍、程燕云、蔡春霞。

史炳星、乔雪峰、刘德华、齐栋超、李寒松、杨冬慧、何君青、林建明、贾燕军、高峻（按姓氏笔画为序排列）参与了本册教科书的修改与讨论。此外，各地教研员、一线教师在教科书试教试用期间提供了宝贵的修改意见和建议，有效提升了教科书质量，在此一并表示感谢！

真诚希望广大师生在使用过程中提出宝贵意见，以便我们进一步修改和完善。欢迎来电来函与我们联系：北京师范大学出版社初中数学编辑室（100088），010-58802832，czsx@bnupg.com。

北京师范大学出版社